

Primljen / Received: 29.9.2011.
 Ispravljen / Corrected: 21.10.2011.
 Prihvaćen / Accepted: 24.1.2012.

Dostupno online / Available online: 15.2.2012.

Numerički model ponašanja konstrukcija uslijed požara

Autori:



Neno Torič, dipl. ing. građ.

Sveučilište u Splitu

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Neno.Toric@gradst.hr



Prof.dr.sc. **Alen Harapin**, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Splitu

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Alen.Harapin@gradst.hr



Prof.dr.sc. **Ivica Boko**, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Splitu

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Ivica.Boko@gradst.hr

Izvorni znanstveni rad

Neno Torič, Alen Harapin, Ivica Boko

Numerički model ponašanja konstrukcija uslijed požara

U radu je prikazan numerički model i razvijeni računalni program za predviđanje ponašanja konstrukcija uslijed djelovanja požara. Nelinearni numerički postupak provodi se u zadanim vremenskim inkrementima, pri čemu se u svakom inkrementu proračunava razdioba temperature, u ovisnosti o njoj korigiraju karakteristike materijala i krutost elementa te rješava statički problem. Na jednostavnom primjeru čeličnog grednog nosača prikazana je efikasnost i točnost razvijenog modela i računalnog programa.

Ključne riječi:

požarno opterećenje, mehaničke karakteristike, numerički model, provođenje topline, nelinearni proračun, čelik, beton

Original scientific paper

Neno Torič, Alen Harapin, Ivica Boko

Numerical model for determining fire behaviour of structures

A numerical model and computer program for predicting behaviour of structures subjected to fire action are presented in the paper. The nonlinear numerical procedure is conducted in pre-defined time increments. At that, the distribution of temperature is calculated in each increment and, depending on this calculation, material properties and stiffness of the element are corrected, and the static problem is resolved. The efficiency and accuracy of the model and computer program are presented on an example of a simply supported beam.

Key words:

fire load, mechanical properties, numerical model, heat transfer, nonlinear analysis, steel, concrete

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Neno Torič, Alen Harapin, Ivica Boko

Numerisches Modell des Verhaltens von Konstruktionen infolge einer Brandwirkung

In der Arbeit ist das numerische Modell und das entwickelte Computerprogramm zur Prognosierung des Verhaltens von Konstruktionen infolge einer Brandwirkung dargestellt. Das nichtlineare numerische Verfahren wird innerhalb der vorgegebenen Zeitinkremente durchgeführt, wobei in jedem Inkrement die Temperaturverteilung ausgerechnet wird und abhängig davon werden die materiellen Charakteristiken und die Festigkeit der Elemente korrigiert sowie das statische Problem gelöst. Anhand des einfachen Beispiels des Einfeldträgers werden Effizienz sowie die Genauigkeit des entwickelten Modells und Computerprogrammes dargestellt.

Schlüsselwörter:

Brandbelastung, mechanische Charakteristiken, numerisches Modell, Wärmeleitung, nichtlineare Berechnung, Stahl, Beton

1. Uvod

Numeričko modeliranje ponašanja građevinskih konstrukcija uslijed djelovanja požara predstavlja jedno od trenutno aktualnih područja istraživanja na svjetskoj razini. Razvoj jednostavnih i efikasnih numeričkih modela, pogotovo onih potvrđenih eksperimentalnim ispitivanjima [1,2], predstavlja osnovu za bolje upoznavanje jednog stohastičkog procesa kao što je požar te daljnje nadopunjavanje građevinskih normi za bolje i sigurnije konstrukcije.

Prva znanstvena ispitivanja djelovanja požara na konstrukcije počela su još 60-ih godina prošlog stoljeća. Razvoj računala daje novi poticaj svim područjima inženjerstva, pa tako i razvoju matematičkih/numeričkih modela za opis požarnog djelovanja na konstrukcije. Prvi modeli razvijeni su 70-ih godina 20. stoljeća, uglavnom za čelične konstrukcije, a bili su koncipirani na hibridnom modelu nelinearne nosivosti presjeka u kombinaciji s modelom provođenja topline. Ti su modeli najčešće bili bazirani na 2D modelu provođenja topline, koji je davao dovoljno dobra predviđanja razvoja temperatura u konstrukciji ako je konstrukcija jednolično zagrijavana po cijelom rasponu, što najčešće nije slučaj u realnoj situaciji požara.

U kasnijim istraživanjima [3,4,5,6] u hibridne se modele ugrađuju različite formulacije mehaničkog modela konstrukcije baziranog na 1D/2D elementima za opis geometrije konstrukcije/presjeka u kombinaciji sa 3D modelom provođenja topline, koji daje preciznija predviđanja razdiobe temperature u konstrukciji. Poseban problem u eksperimentalnim istraživanjima i dalje predstavlja definiranje konstitutivnog zakona ponašanja materijala na visokim temperaturama u višeosnom stanju naprezanja, što onemogućava primjenu 3D mehaničkog modela poprečnog presjeka konstrukcije. Kod čeličnih konstrukcija postignuto je bolje predviđanje ponašanja konstrukcija u požaru nego kod betonskih konstrukcija zbog manje kompliciranog ponašanja čelika kao materijala na visokim temperaturama te zbog manjih devijacija eksperimentalno određenih vrijednosti mehaničkih karakteristika čelika [7]. Predviđanja ponašanja konstrukcija u požaru te požarna otpornost određena prema tim modelima postaju preciznija ubacivanjem različitih implicitnih i eksplicitnih modela puzanja materijala pri visokim temperaturama [8,9].

2. Opis numeričkog modela

2.1. Uvod

Numerički model koji zorno opisuje ponašanje konstrukcija pod djelovanjem požara mora biti sposoban opisati, uz nelinearno ponašanje konstrukcija pod opterećenjem, i razvoj temperature unutar konstrukcije i promjenu karakteristika materijala pri visokim temperaturama.

Za provedbu takvog potpunog (nelinearnog) proračuna mora biti poznat opis geometrije poprečnog presjeka, točan tip i položaj armature (za armiranobetonske konstrukcije) i uvjeti opterećenja, kao i zakon ponašanja materijala, koji je u općem slučaju nelinearan.

Rezultati takvog proračuna mogu značajno promijeniti sliku stanja naprezanja i deformacija u pojedinim konstrukcijskim elementima te omogućiti inženjeru konstruktoru bolji uvid u ponašanje i moguće otkazivanje nosivosti konstrukcije, što svakako vodi trajnijim i ekonomičnijim građevinama.

2.2. Linearno elastični model za štapne elemente

Osnovno polazište gotovo svih nelinearnih proračuna je linearni proračun, tj. proračun za materijal koji podliježe Hookeovu zakonu. Takav numerički model ponašanja štapnih konstrukcija je dobro poznat i višestruko opisan u literaturi [10, 11, 12], pa će ovdje biti samo vrlo kratko spomenut.

U ovom radu koriste se dvočvorni pravocrtni, idealno ravni, po dijelovima prizmatični konačni elementi, sa po 6 stupnjeva slobode u čvoru, kakvi su korišteni u nizu radova [11, 13, 14, 15, 16, 17].

Ponašanje štapa pod opterećenjem se općenito može opisati linearnom diferencijalnom

$$LDLp - Q^0Lp - f = 0 \quad (1)$$

gdje je:

- Q - vektor unutarnjih sila
- Q^0 - vektor sprega
- f - vektor opterećenja
- L - je diferencijalni operator

U nedostatku analitičkih rješenja, rješenje jednadžbe (1) obično se traži numeričkim postupcima. Jedan od najčešće primjenjivanih i najpriznatijih postupaka je metoda konačnih elemenata. Njena je bit da se sustav koji ima beskonačni broj stupnjeva slobode zamijeni (simulira) sustavom koji ima konačni broj stupnjeva slobode. Da bi se to postiglo, pretpostavlja se (programira se) ponašanje niza točaka sustava na jednom konačnom elementu vezano uz određeni broj fiksnih, prethodno određenih točaka (čvorova) na tom istom elementu.

Približno rješenje polja pomaka na jednom elementu pretpostavlja se u obliku:

$$p = \hat{p} = H u \quad (2)$$

gdje je H matrica baznih funkcija, a u vektor nepoznatih čvornih pomaka.

Bazne (oblikovne) funkcije se najčešće za štapne sustave biraju iz grupe Hermiteovih polinoma [11, 13].

Iz jednakosti vanjskih i unutarnjih sila slijedi:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{s} + \int \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{f} dx = \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (3)$$

odnosno:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{s} + \int \mathbf{u}^T \mathbf{H}^T \mathbf{f} dx = \int \mathbf{u}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) \mathbf{u} dx \quad (4)$$

tj., nakon množenja s lijeve strane s \mathbf{u}^T :

$$\mathbf{s} = \int (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) \mathbf{u} dx - \int \mathbf{H}^T \mathbf{f} dx \quad (5)$$

ili skraćeno:

$$\mathbf{s}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{u} - \mathbf{F}^e \quad (6)$$

gdje je:

\mathbf{s}^e - vektor unutarnjih sila na krajevima konačnog elementa,

\mathbf{k}^e - matrica krutosti elementa,

\mathbf{F}^e - vektor sila pune upetosti.

Lokalne matrice krutosti i vektor opterećenja potrebno je preslikati u globalni koordinatni sustav, a nakon preslikavanja uspostavlja se ravnoteža globalnog sustava jednostavnim slaganjem krutosti i sila upetosti u odgovarajućim čvorovima mreže konačnih elemenata.

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{k}_{gl}^e ; \quad \mathbf{F} = \sum_e \mathbf{F}_{gl}^e \quad (7)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Ovo su općepoznate jednadžbe, gdje su \mathbf{K} i \mathbf{F} matrice krutosti i opterećenja, a \mathbf{u} vektor globalnih pomaka.

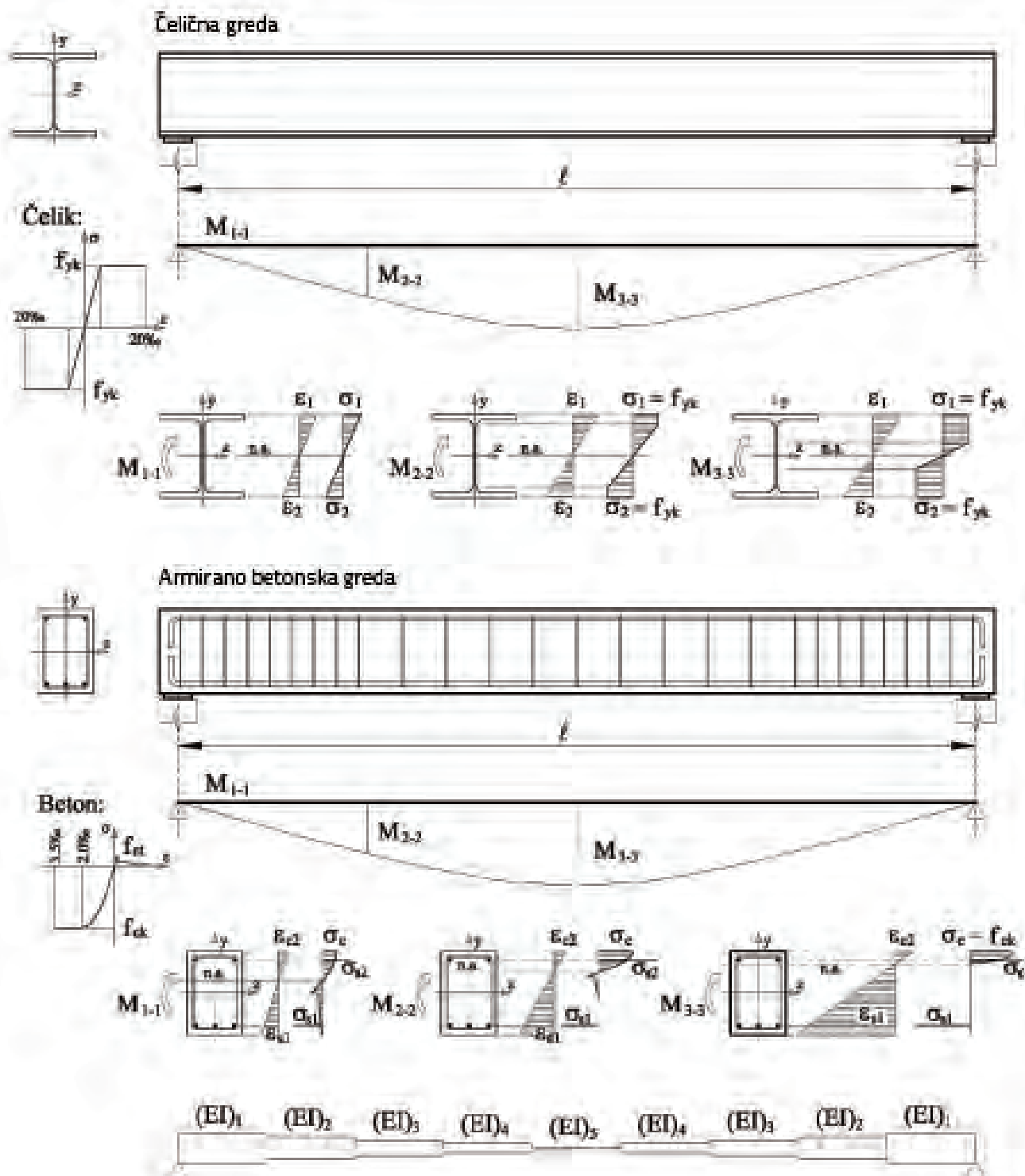
Prije rješavanja gornjeg sustava jednadžbi nužno je u njih uvrstiti rubne uvjete koji, kod slučaja statičkog problema, predstavljaju zadane sile i/ili pomake na rubovima sustava. Lokalna matrica krutosti jednog štapa može se prije transformacije u globalni koordinatni sustav može se izraziti u eksplicitnom obliku:

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{\ell} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Iz izraza (8) jasno je vidljivo da lokalna matrica krutosti, osim o duljini grede l , ovisi i o parametrima materijala: E , G , i geometrije: A , I_y i I_z .

Na realnom štapu (gredi/stupu), na kojem djeluje neko opterećenje, unutarne sile (prije svega momenti savijanja i momenti torzije)

moгу u nelinearnom slučaju značajno promijeniti razdiobu naprezanja i deformacija, što uzrokuje promjenu krutosti. Podjelom štapa na manje dijelove (podštapove), pri čemu se za svaki podštap izračunava njegova realna krutost, materijalna nelinearna analiza se može vrlo lako primijeniti (slika 1.).



Slika 1. Stanje naprezanje–deformacija i krutost duž nosača u ovisnosti o nivou naprezanja u presjeku

Stoga je za potrebe provođenja nelinearne analize nužno odrediti način izračunavanja krutosti poprečnog presjeka pod različitim razinama naprezanja.

2.3. Proračun stanja naprezanje-deformacija i proračun krutosti na poprečnom presjeku

2.3.1. Osnovne odrednice

Osnove pretpostavke modela za proračun stanja naprezanje-deformacija na poprečnom presjeku [12, 18, 19] su:

- presjeci i nakon deformiranja ostaju ravni,
- nema klizanja na spoju različitih materijala nakon njihova sprežanja,
- poznata je jednoosna veza naprezanje-deformacija za svaki materijal, tj. poznat je konstitutivni zakon ponašanja materijala.

2.3.2. Ravnina deformacije presjeka

Grafički prikaz moguće ravnine deformacije u odnosu na prethodno ravnotežno stanje predložen je na slici 2. Dopunska deformacija $\Delta \epsilon$ neke točke presjeka definirana je jednadžbom ravnine:

$$\Delta \epsilon = \rho^T r \tag{9}$$

gdje je:

$$\rho^T = [\Delta \epsilon_0, \rho_z, \rho_y] \tag{10}$$

$$r^T = 1, -y, z \tag{11}$$

U navedenim izrazima ρ je vektor nepoznatih parametara dopunske ravnine deformacija, a y i z su koordinate točke presjeka u Y-Z ravnini. Ravnina deformacije opisana je njenim probodištem $\Delta \epsilon_0$ s koordinatom osi X te komponentama relativnog zaokreta ρ_z oko osi Y i ρ_y oko osi Z.

Ako promatrana točka presjeka ima prethodnu deformaciju, p , njena ukupna deformacija iznosi:

$$\epsilon = \epsilon_p + \Delta \epsilon \tag{12}$$

Deformacija ϵ_p poznata je i određena prethodnim ravnotežnim položajem preko ρ_p , tj. analogno izrazu (9) pomoću:

$$\epsilon_p = \rho_p^T r \quad ; \quad \rho_p^T = [\epsilon_{0p}, \rho_{zp}, \rho_{yp}] \tag{13}$$

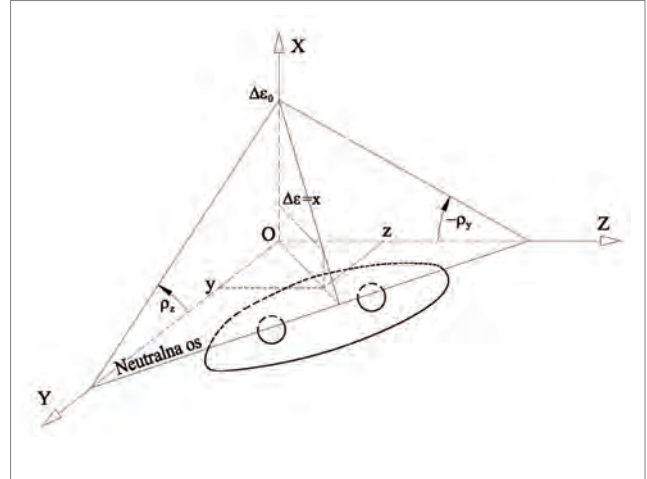
Ako se izrazi (9) i (13) uvrste u izraz (12), slijedi:

$$\epsilon = \rho_p^T r + \rho^T r \tag{14}$$

odnosno:

$$\epsilon = \rho_u^T r \quad ; \quad \rho_u = \rho_p + \rho \tag{15}$$

gdje je ρ_u vektor parametara ukupne ravnine deformacije.



Slika 2. Grafički prikaz moguće ravnine deformacije

2.3.3. Veza naprezanje-deformacija

Polazi se od poznate veze između jednoosnog naprezanja σ i deformacije ϵ za pojedini materijal, tj. od takozvanog konstitutivnog zakona ponašanja materijala. Za realne materijale ta je veza u osnovi zakrivljena, a definirana je jednoosnim testom ili odgovarajućom regulativom. Sa stajališta numeričke analize pogodno je tu vezu definirati kao linearnu po pojedinim segmentima (slika 3.). Tako uvedena kontrolirana pogreška zanemariva je u odnosu na druge pretpostavke. Veza σ - ϵ između bilo kojih dviju točaka i, j dijagrama opisana je izrazom:

$$\sigma = \sigma_i + E(\epsilon - \epsilon_i) \tag{16}$$

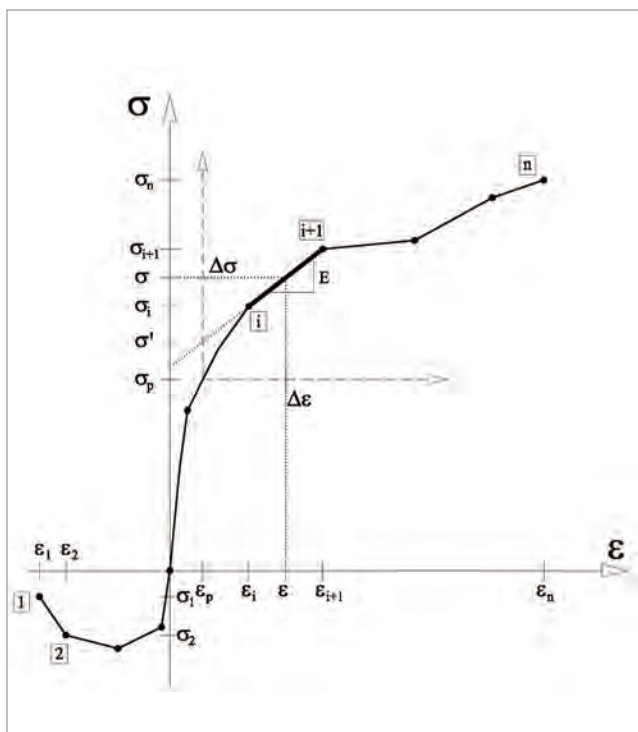
Ako se izraz (14) uvrsti u (16) i uvede zamjena:

$$\sigma' = \sigma_i - E \epsilon_i + E \rho_p^T r \tag{17}$$

naprezanje na promatranom sektoru može se opisati izrazom:

$$\sigma = \sigma' + E \rho^T r \tag{18}$$

U navedenim izrazima E označava tekući modul elastičnosti materijala (nagib pravca na promatranom sektoru), a grafička interpretacija σ' vidi se na slici 3. Potrebno je istaknuti da je za poznato početno stanje i pretpostavku tekuće deformacije između točaka i, j naprezanje σ' konstantno i određeno.



Slika 3. Moguća veza deformacija–naprezanje za neki materijal

U slučaju konstrukcija izloženih djelovanju požara, veza naprezanje–deformacija materijala ovisna je o visini temperature. Zbog toga je ponašanje materijala izloženog visokim temperaturama obično opisano kao niz krivulja naprezanje–deformacija, svaka za specifičnu temperaturu, pri čemu se vrijednosti za temperature između specificiranih dobivaju linearnom interpolacijom.

2.3.4. Jednadžba ravnoteže

Vektor unutarnjih otpornih sila poprečnog presjeka S_u funkcija je rezultantne ravnine deformacije i veze σ - ϵ pojedinog materijala. Ako su oni poznati, vrijednosti S_u funkcije mogu se izračunati integracijom naprezanja preko područja kompozitnog presjeka:

$$S_u = [N_u, M_{zu}, M_{yu}] = \sum_m \int_{\Omega} \sigma r d\Omega \quad (19)$$

gdje N_u označava unutarnju uzdužnu silu, M_{zu} i M_{yu} odgovarajuće momentne savijanja s obzirom na koordinatne osi, Ω područje pojedinog materijala i Σ sumiranje preko svih materijala m . Ako se (18) uvrsti u (19), slijedi:

$$S_u = S'_u + I \rho \quad (20)$$

gdje je:

$$S'_u = \sum_m \int_{\Omega} \sigma' r d\Omega \quad (21)$$

$$I = \sum_m \int_{\Omega} E r r^T d\Omega \quad (22)$$

S'_u predstavlja dio vektora unutarnjih sila koji se dobije integracijom naprezanja σ' po čitavoj površini kompozitnog presjeka. Članovi matrice I predstavljaju tekuće mehaničke karakteristike presjeka.

Vektor S_v sastoji se od vektora vanjskih sila S_{vp} , koji određuje početnu ravninu deformacije ρ_p , te vektora dodatnih sila ΔS_v , koji uzrokuje dodatnu deformacijsku ravninu ρ

$$S_v = S_{vp} + \Delta S_v \quad (23)$$

Da bi se uspostavila ravnoteža, S_v treba biti jednak S_u , odnosno:

$$S_v - S_u = 0 \quad (24)$$

Izraz (24) u razvijenom obliku predstavlja sustav triju jednadžbi s nepoznatim vektorom

$$\rho^T = [\Delta \epsilon_o, \rho_z, \rho_y].$$

2.3.5. Šipkasta armatura

Nakon određivanja veličine ukupne deformacije na promatranoj šipci, utvrđuje se između kojih čvornih deformacija $\epsilon_i, \epsilon_{i+1}$ na predmetnom dijagramu σ - ϵ ona leži. Potom se odredi pripadajući modul elastičnosti E te doprinos tekućih mehaničkih karakteristika šipkastih materijala, analogno izrazu (22), pomoću:

$$I_s = \sum_s E A_s r r^T \quad (25)$$

gdje A_s označava površinu promatrane šipke. Sumira se preko svih šipki presjeka.

Dio vektora unutarnjih sila kojemu pridonosi šipkasta armatura određen je analogno izrazu (21), tj. sljedećim izrazom:

$$S'_{us} = \sum_s A_s (\sigma_i - E \epsilon_i + E \epsilon_p) r \quad (26)$$

Kod šipkastih materijala prikladnije je početnu deformaciju šipke definirati diskretnom vrijednošću ϵ_p , nego parametrom početne ravnine deformacija ρ_p .

2.3.6. Materijal s većom površinom

Područje materijala koji ima značajnu površinu u odnosu na površinu čitavog poprečnog presjeka zadaje se konveksnim poligonalnim elementima bez šupljina (konačni elementi – KE). Na području jednog KE može biti samo jedan tip materijala,

izuzimajući šipkastu armaturu. Svaki KE određen je listom čvornih točaka i njihovim koordinatama te indeksom svojstva materijala. Dakle, konture svakog materijala najprije se aproksimiraju poligonom, a potom se omeđeno područje podijeli na KE (slika 4.). Nakon određivanja rezultantne ravnine deformacija na promatranom KE i položaja pripadajuće neutralne osi u prethodnoj iteraciji, postavlja se skup pravaca koji su s njom paralelni i na kojima leže točke KE, s deformacijama jednakim čvornim deformacijama ε_i radnog dijagrama. Potom se traži presjek tih pravaca sa stranicama svakog KE, te tako na svakom od njih definiraju područja Ω_{ei} (podelementi) s konstantnim modulom elastičnosti E . Matrica I_e za svako to područje je oblika:

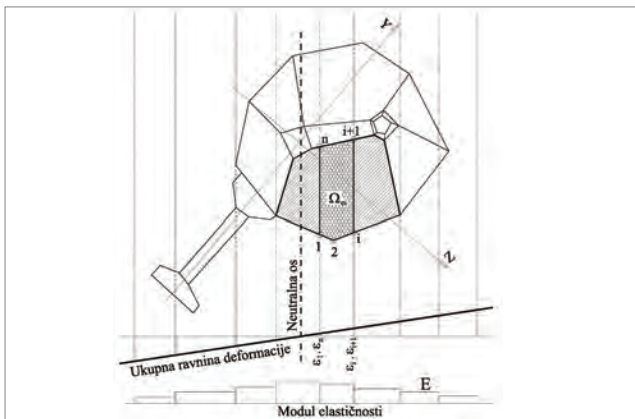
$$I_e = \begin{bmatrix} (A)_e & -(Q_z)_e & (Q_y)_e \\ -(Q_z)_e & (I_z)_e & (I_{zy})_e \\ (Q_y)_e & -(I_{zy})_e & (I_y)_e \end{bmatrix}, \quad (27)$$

a dobivena je sumiranjem preko svih stranica podelementa, prema izrazima:

$$w_j = z_j y_{j+1} - z_{j+1} y_j \quad ; \quad j = 1, 2, 3 \dots n \quad ; \quad n+1 = 1 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} (A)_e &= 1/2 E \sum w_j \\ (Q_z)_e &= 1/6 E \sum w_j (y_j + y_{j+1}) \\ (Q_y)_e &= 1/6 E \sum w_j (z_j + z_{j+1}) \\ (I_z)_e &= 1/12 E \sum w_j [(y_j + y_{j+1})^2 - y_j y_{j+1}] \\ (I_y)_e &= 1/12 E \sum w_j [(z_j + z_{j+1})^2 - z_j z_{j+1}] \\ (I_{zy})_e &= 1/24 E \sum w_j [(z_j + z_{j+1})(y_j + y_{j+1}) + z_j y_j + z_{j+1} y_{j+1}] \end{aligned} \quad (29)$$

u kojima uređeni parovi (z_j, y_j) i (z_{j+1}, y_{j+1}) predstavljaju koordinate rubnih točaka promatrane stranice, a n broj čvorova (stranica). Sumiranje se obavlja preko svih stranica podelementa. Dio



Slika 4. Prostorna diskretizacija poprečnog presjeka

vektora unutarnjih sila kojemu pridonosi ovaj podelement, prema izrazu (20), određen je sljedećim:

$$(S'_u)_e = (S'_{u1})_e + (S'_{u2})_e + I_e \rho_p \quad (30)$$

gdje je:

$$(S'_{u1})_e = \int_{\Omega_e} \sigma_i r d \Omega = \begin{Bmatrix} (\overline{A})_e \\ -(\overline{Q_z})_e \\ (\overline{Q_y})_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\sigma_i / \varepsilon_i)(A)_e \\ -(\sigma_i / \varepsilon_i)(Q_z)_e \\ (\sigma_i / \varepsilon_i)(Q_y)_e \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$(S'_{u2})_e = \int_{\Omega_e} \varepsilon_i E r d \Omega = \begin{Bmatrix} (\overline{A})_e \\ -(\overline{Q_z})_e \\ (\overline{Q_y})_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_i (A)_e \\ -\varepsilon_i (Q_z)_e \\ \varepsilon_i (Q_y)_e \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Mehaničke karakteristike i dio vektora unutarnjih sila jednog konačnog elementa dobivaju se sumiranjem odgovarajućih karakteristika svih područja na tom elementu, a pojedinih materijala preko svih konačnih elemenata koji opisuju taj materijal. Analogno, sumiranjem preko svih materijala dobivaju se ukupne karakteristike kompozitnog presjeka.

2.4. Nestacionarni model provođenja topline

2.4.1. Razvoj temperature u zatvorenom prostoru i standardna krivulja požara

Razvoj temperature u prostoru koji je zahvaćen stvarnim požarom ovisi o nizu parametara: među kojima su: površina koja je prekrivena gorivim materijalom, količina gorivog materijala, površina ventilacijskih otvora te dimenzije prostora. S obzirom na velik broj parametara koji utječu na razvoj temperature u prostoru, prilikom provođenja eksperimenata vezanih za ponašanje konstrukcija u požaru najčešće se koristi tipizirani oblik razvoja temperature u peći izražen i opisan krivuljom razvoja požara koja je definirana jednadžbom:

$$T = T_0 + 345 \cdot \log_{10}(8 \cdot t + 1), \quad (33)$$

gdje je:

- T - temperatura ($^{\circ}C$),
- T_0 - početna temperatura ($^{\circ}C$),
- t - vrijeme (min).

2.4.2. Nestacionarno provođenje topline

Nestacionarno provođenje topline predstavlja vremenski ovisan proces provođenja topline u kojem se temperaturno polje, nastalo prijenosom topline unutar promatranog područja, mijenja ovisno o vremenu. Model koji je implementiran baziran je na 3D nestacionarnom nelinearnom modelu provođenja topline. Diferencijalna jednadžba koja opisuje takav proces u prostornoj domeni definiran je izrazom:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} + f \quad i, j = 1, \dots, 3 \quad (34)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(x) - \text{gustoća materije (kg/m}^3\text{)} \\ C &= C(x, t) - \text{specifični toplinski kapacitet (J/kgK)} \\ k_{ij} &= \rho C K_{ij} - \text{tenzor koeficijentata toplinske provodljivosti (W/mK)} \\ K_{ij} &- \text{tenzor difuzije topline (m}^2\text{/s)} \end{aligned}$$

Primjenom slabe formulacije na jednadžbu (34) te korištenjem Galjerkinove metode za odabir funkcije približnog rješenja dobiva se sustav od p običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$C_{mn} \frac{dT_m}{dt} + K_{mn} T_m = F_n + Q_n \quad ; \quad m, n = 1, \dots, p \quad (35)$$

gdje je:

$$C_{mn} = \int_{\Omega} \rho C \varphi_m \varphi_n d\Omega \quad (36)$$

$$K_{mn} = \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} d\Omega \quad (37)$$

$$F_n = \int_{\Omega} \varphi_n f d\Omega \quad (38)$$

$$Q_n = \int_{\Gamma} \varphi_n q d\Gamma \quad (39)$$

$$i, j = 1, 2, 3 \quad ; \quad m, n = 1, \dots, p$$

$$\begin{aligned} \Omega &- \text{prostorna domena,} \\ \Gamma &- \text{rub prostorne domene} \\ \varphi_m, \varphi_n &- \text{oblikovne funkcije približnog rješenja,} \\ p &- \text{ukupan broj čvorova u diskretizaciji prostorne domene.} \end{aligned}$$

Matrica C naziva se kapacitivnom matricom, matrica K matricom provođenja, vektor F vektorom toplinskog opterećenja, a Q vektorom toplinskog dotoka. Toplinski tok koji nastaje uslijed djelovanja požara sastoji se od konvekcije i radijacije. Toplinski tok na površini grijanog elementa određuje se prema izrazu:

$$q = \alpha_c \cdot (\theta_g - \theta_m) + \Phi \cdot \varepsilon_{res} \cdot \sigma \cdot (\theta_g^4 - \theta_m^4) \quad (40)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} q &- \text{toplinski tok na površini elementa (W/m}^2\text{),} \\ \alpha_c &- \text{koeficijent konvekcije (W/m}^2\text{K),} \\ \Phi &- \text{faktor konfiguracije,} \\ \varepsilon_{res} &- \text{rezultantni faktor emisivnosti između elementa i požara,} \\ \sigma &- \text{Stephan-Boltzmannova konstanta (=5.67A10-8 W/m}^2\text{K}^4\text{),} \\ \theta_g &- \text{temperatura plina u okolini elementa (}^\circ\text{C),} \\ \theta_m &- \text{temperatura površine elementa (}^\circ\text{C).} \end{aligned}$$

Prostorna domena aproksimira se određenim brojem konačnih elemenata prema slici 5. Prikazani model provođenja topline koristi 8-čvorne 3D konačne elemente.

2.4.3. Integracija jednadžbi diskretnog sustava

Rješenje sustava nelinearnih običnih diferencijalnih jednadžbi (35) traži se integracijom jednadžbi između dvaju susjednih vremenskih stanja za razmjerno mali vremenski interval Δt . Temperature na početku vremenskog intervala su poznate, te se koriste za izračunavanje temperatura na kraju vremenskog intervala, tj. u trenutku $t + \Delta t$. Primjenom mješovitog postupka integracije na sustav jednadžbi (35) dobiva se:

$$C_{mn} (T_m^{t+\Delta t} - T_m^t) + (1 - \Theta) \Delta t (K_{mn} T_m^t - F_n^t - Q_n^t) + \Theta \Delta t (K_{mn} T_m^{t+\Delta t} - F_n^{t+\Delta t} - Q_n^{t+\Delta t}) = 0 \quad (41)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} T_m^t &- \text{poznata vrijednost temperature na početku} \\ &\text{vremenskog intervala} \\ T_m^{t+\Delta t} &- \text{nepoznata vrijednost temperature na kraju} \\ &\text{vremenskog intervala} \\ \Theta &- \text{interpolacijski parametar,} \\ F_n^{t+\Delta t} &- \text{vektor proizvodnje polja na kraju vremenskog intervala} \\ Q_n^{t+\Delta t} &- \text{vektor rubnog toplinskog toka na kraju} \\ &\text{vremenskog intervala} \\ \Delta t &- \text{inkrementni vremenski korak} \end{aligned}$$

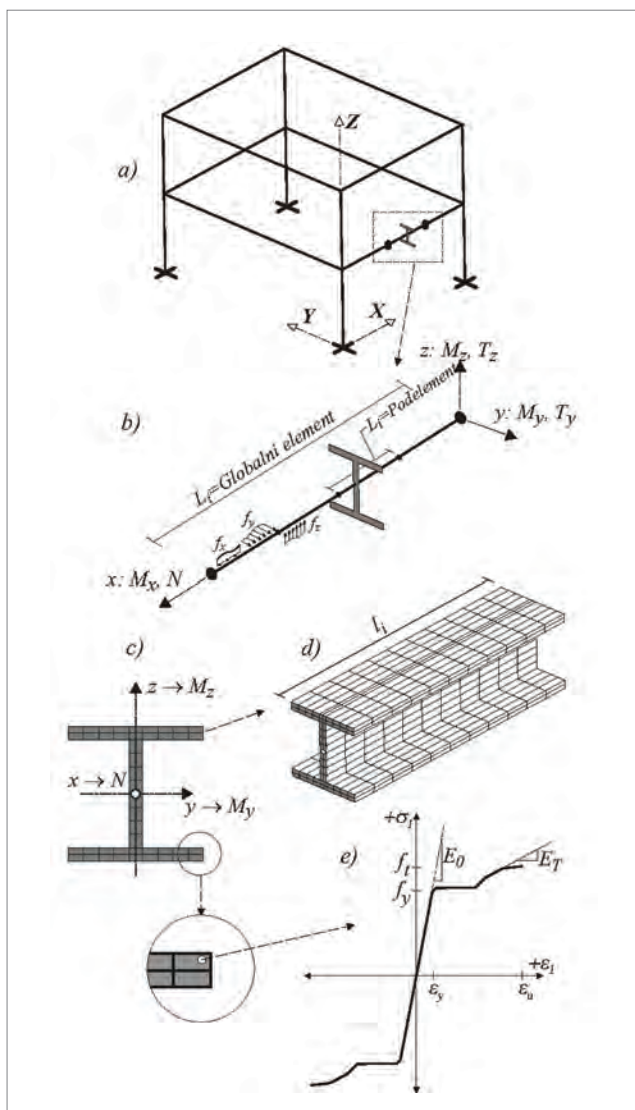
Iterativni postupak određivanja vrijednosti $T_m^{t+\Delta t}$ započinje tako da se za prvi iterativni korak unutar vremenskog inkrementa Δt pretpostavlja jednakost $T_m^{t+\Delta t} = T_m^t$ nakon čega se računa nova vrijednost temperature na kraju vremenskog intervala sve dok nije zadovoljen uvjet:

$$\frac{\|T_m^{t+\Delta t} - T_m^t\|}{\|T_m^{t+\Delta t}\|} \leq \mu_p \quad ; \quad m = 1, \dots, p \quad (42)$$

gdje je μ_p norma odstupanja.

2.5. Cjeloviti nelinearni model za predviđanje ponašanja konstrukcije pod požarnim opterećenjem

Prethodno definirani modeli: model za proračun linearno elastičnih štapnih sustava, model za dimenzioniranje kompozitnih poprečnih presjeka i model za nestacionarno provođenje topline presloženi su u jedan cjeloviti model za proračun prostornih štapnih sustava izloženih djelovanju požara. Model je uvršten u računalni program. Slika 5. prikazuje diskretizaciju jednostavne konstrukcije na kojoj je prikazana veza između prostornog štapnog sustava, 2D i 3D mreže. 2D mreža se koristi za diskretizaciju poprečnih presjeka štapova konstrukcije, a na njoj se izračunava stanje naprezanje-deformacija na presjeku te izračunava krutost. 3D mreža (model) koristi se za proračun provođenja topline.



Slika 5. a) Globalna diskretizacija prostornog okvira; b) štapni element; c) diskretizacija poprečnog presjeka elementa; d) usporedni 3D model za analizu provođenja topline; e) zakon ponašanja za elemente poprečnog presjeka

Postupak počinje definiranjem prostornog štapnog (okvirnog) sustava, tj. za svaki štap (stup/gredu) nužno je definirati početni i krajnji čvor. Za svaki štap također je potrebno definirati poprečni presjek sa zakonom ponašanja (σ-ε dijagram) svakog korištenog materijala (2D mreža). 3D mreža za proračun provođenja topline tada se automatski generira duž štapa (grede/stupa). Također je potrebno definirati i broj podelemenata na koje će konačni element biti podijeljen. Svakom podelementu pridodaje se poprečni presjek i zakon ponašanja s globalnog elementa (štapa). Na globalnom 3D modelu izvodi se proračun toplinskog toka i u svakom se čvoru dobiva trenutna temperatura. Na svakom elementu 2D mreže (koja predstavlja poprečni presjek elementa) računa se srednja (prosječna) temperatura te korigira zakon ponašanja materijala. Nakon toga može se odrediti stanje naprezanje-deformacija u presjeku te izračunava krutost presjeka, koja predstavlja krutost podelementa štapa.

Model je inkrementan i po inkrementima linearan. Postupak započinje na razini presjeka od nultog stanja proračunom stvarnih krutosti presjeka (nenaprezani presjek) prema izrazima (22), (25) i (27). Dobivene veličine predstavljaju početnu krutost presjeka. Početne krutosti služe za proračun početne matrice krutosti štapa. Bitno je napomenuti da se integracijom na razini presjeka postavljaju/korigiraju samo aksijalne i fleksijske karakteristike presjeka, dok se posmične i torzijske ostavljaju nepromijenjenima.

Slijedi uobičajeni postupak slaganja globalne matrice krutosti i globalnog vektora opterećenja (2), te proračun sustava. Nakon proračuna unutarnjih sila na krajevima štapa slijedi određivanje položaja ravnine deformacije i određivanje nove krutosti presjeka. Općenito su moguća dva slučaja:

1. Presjeku je moguće odrediti položaj ravnine deformacije. U tom slučaju presjek ima dovoljnu čvrstoću da se odupre djelovanju vanjskih sila, tj. sila dobivenih linearnom analizom štapnog sustava.
2. Presjeku nije moguće odrediti položaj deformacijske ravnine, tj. postupak prikazan u dijelu 2.2 divergira. U tom slučaju ustanovi se da je došlo do sloma presjeka, tj. lokalnog sloma na sustavu, a time i do mogućeg globalnog sloma sustava. Zapravo se krutosti izjednačavaju s nulom pa se postupak globalnog proračuna nastoji ponoviti.

Postupak se nastavlja sve dok norma vektora prirasta pomaka ne padne ispod po volji odabrane vrijednosti, tj. do:

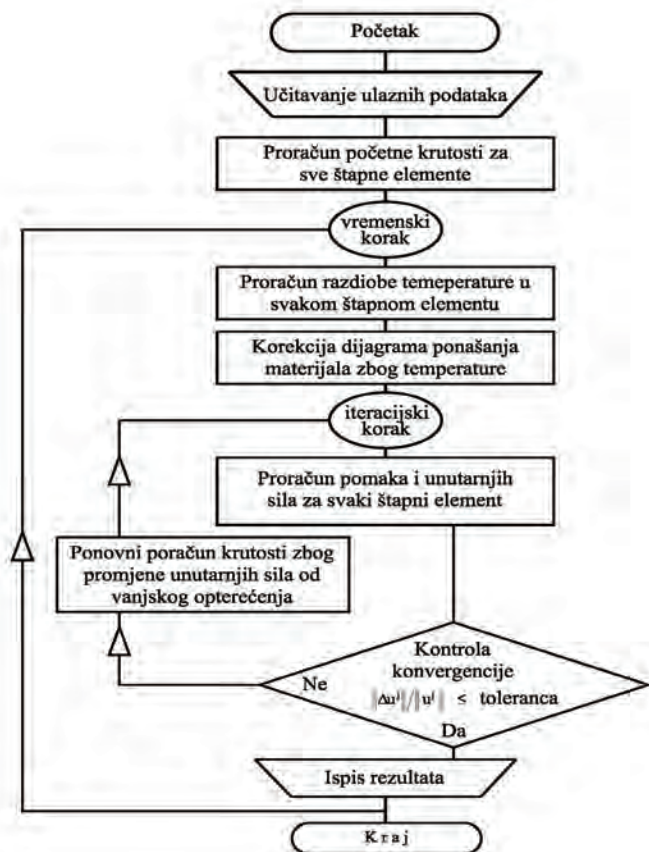
$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}_i\|}{\|\mathbf{u}_i\|} \leq \mu_p \quad (43)$$

U svim praktičnim slučajevima može se vrijednost μ_p odabrati kao 0,001.

Inkrementni postupak i dijagram toka računalnog programa prikazani su u tablici 1. i na slici 6.

Tablica 1. Numerički model i inkrementni postupak

1	<p>Pretpostavlja se početni vektor opterećenja, koji je ustvari nul-vektor ($F=0$). Na osnovi tog opterećenja određuju se početne lokalne matrice krutosti za svaki štap (20 i 22), a i početna globalna matrica krutosti K_0:</p> $K_0 = \sum_c k_{gl,0}^c$ <p>Ova matrica predstavlja tzv. nultu krutost, tj. krutost sustava na koji ne djeluju sile.</p>
2	<p>Iz zadanog vanjskog opterećenja na štapovima odrede se sile pune upetosti na štapu te vektor vanjskih sila (sile pune upetosti u globalnom koordinatnom sustavu):</p> $F^e = \int H^T f dx \quad ; \quad F_{gl}^e = T F^e \quad ; \quad F = \sum_c F_{gl}^c$
3	<p>Vremenska petlja; postavlja se prvi vremenski korak $j=1$.</p>
4	<p>Proračun temperaturnog polja u zamjenskim 3D elementima (slika 6.). Za svaki poprečni presjek: proračun srednje temperature i korekcija zakona ponašanja prema izračunanoj temperaturi.</p> $\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} + f \quad i, j = 1, \dots, 3$
5	<p>Iteracijska petlja; postavlja se prvi iteracijski korak $i=1$.</p>
6	<p>Izračun pomaka čvorova i unutarnjih sila na elementima:</p> $K_i u_i = F \Rightarrow u_i = K_i^{-1} F \quad ; \quad u_i = \{u_i, v_{pi}, w_{pi}, \theta_i, w_{si}, v_{si}\}$ $s^e = k^e u - F^e$
7	<p>Kontrola konvergencije:</p> $\Delta u_i = u_i - u_{i-1} \quad \frac{\ \Delta u_i\ }{\ u_i\ } \leq \mu_p$ <p>Ako je uvjet konvergencije zadovoljen, iteracijski postupak se okončava, printaju se rezultati i prelazi na sljedeći vremenski korak (4). Ako konvergencija nije zadovoljena, prelazi se na korak (7). Vrijednost μ_p zadana je odabirom male vrijednosti.</p>
8	<p>Korekcija krutosti na 2D elementu s obzirom na korigirani zakon ponašanja i korigirane unutarnje sile.</p> $K_i = I = I_c + I_s = \sum_m \int_{\Omega} E r r^T d\Omega \quad "+" \quad \sum_s E A_s r r^T$ <p>Postavlja se novi iteracijski korak ($i=i+1$) i nastavlja se proračun, korak (6). Postupak se izvodi sve dok se ne postigne zahtijevana točnost ili dok se ne utvrdi divergencija postupka koja upućuje na otkazivanje nosivosti poprečnog presjeka, što nadalje upozorava na otkazivanje nosivosti tog elementa, a moguće i cijelje konstrukcije.</p>

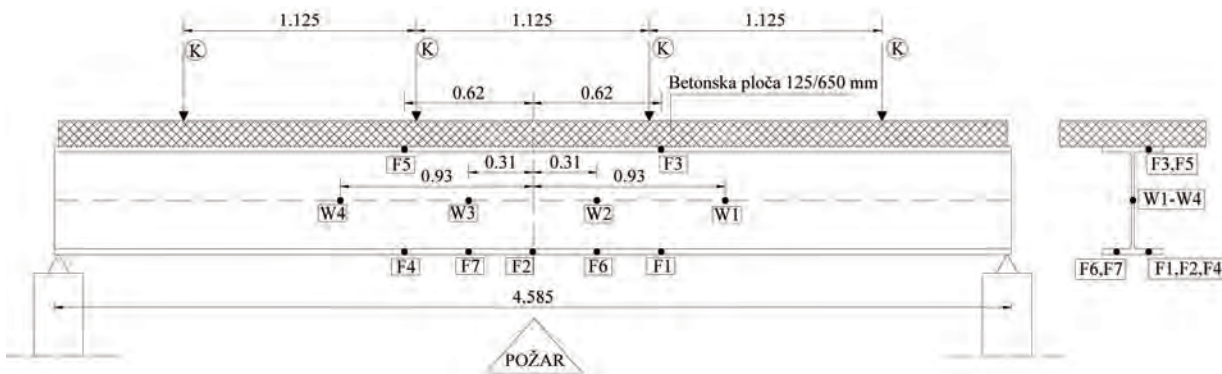


Slika 6. Dijagram toka računalnog programa

3. Verifikacija numeričkog modela

3.1. Opis modela i eksperimenta

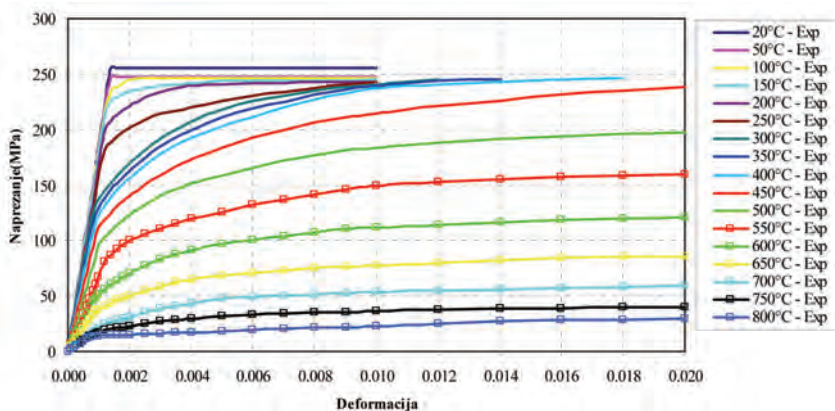
U svrhu prikazivanja mogućnosti opisanog numeričkog modela ponašanja konstrukcija u požaru obrađen je primjer modeliranja eksperimenta koji su proveli Wainman i Kirby [20], a koji uključuje slobodno oslonjeni čelični nosač I 254/146, kvalitete čelika S275, duljine 4,58 m, izložen djelovanju temperatura definiranih standardnom krivuljom požara. Na grednom nosaču se s gornje strane nalazi nespregnuta betonska ploča debljine 12,5 cm i širine 65 cm, koja opterećuje nosač po dužini opterećenjem iznosa 2,21 kN/m. Kao dodatno opterećenje uzete su 4 koncentrirane sile K iznosa 32,5 kN, koje su postavljene na pozicije definirane na slici 7., zajedno s dispozicijom mjernih točaka u provedenom eksperimentu u kojima je praćen prirast temperature u vremenu. U tablici 2. prikazane su dimenzije i geometrijska svojstva čeličnog presjeka I 254/146 koja su korištena kao ulazni podaci za modeliranje slobodno oslonjenog čeličnog nosača.



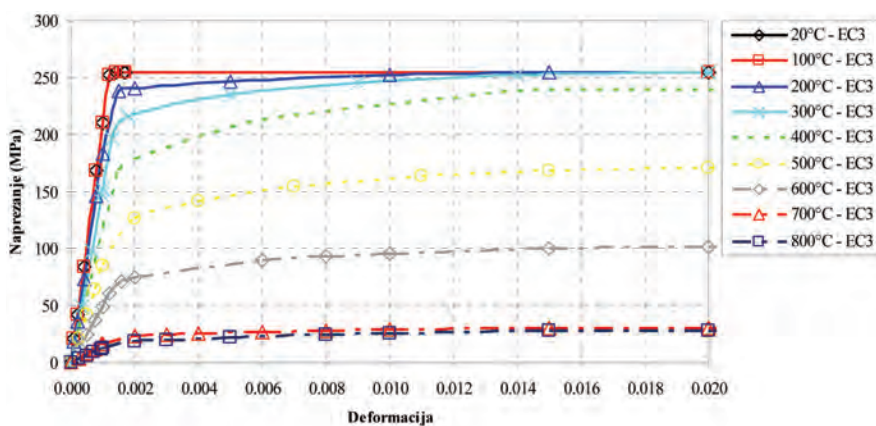
Slika 7. Prikaz eksperimentalnog uzorka [20] s mjernim temperaturnim točkama (W-hrbat, F-pojasnica)

Tablica 2. Dimenzije poprečnog presjeka I 254/146

h (mm)	b (mm)	t _w (mm)	t _f (mm)	I (cm ⁴)		C80/95	A (mm ²)
				I _y	I _z		
259.6	147.3	7.3	12.7	6558.0	677.0	80	5452.0



Slika 8. Krivulje naprezanje-deformacija prema Wainmanu i Kirbyju



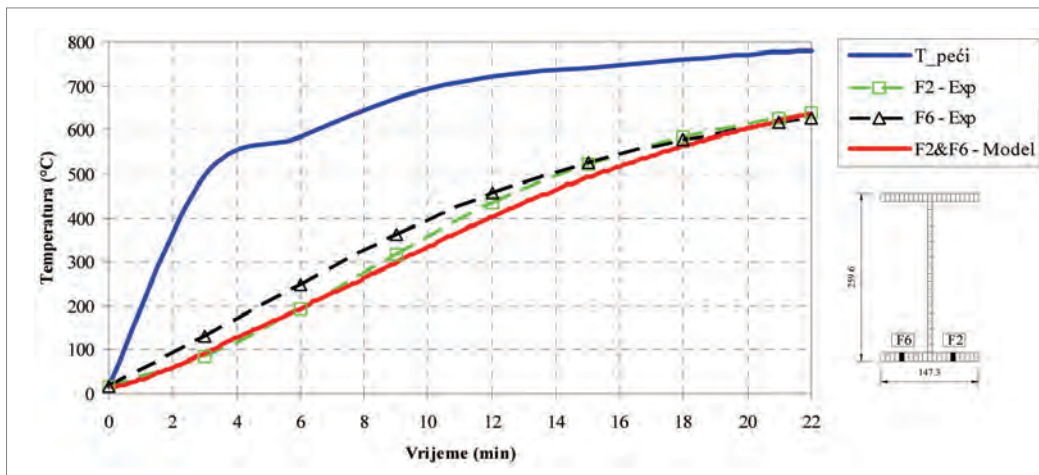
Slika 9. Krivulje naprezanje-deformacija prema normi EN1993-1-2

3.2. Rezultati eksperimenta i usporedba s numeričkim modelom

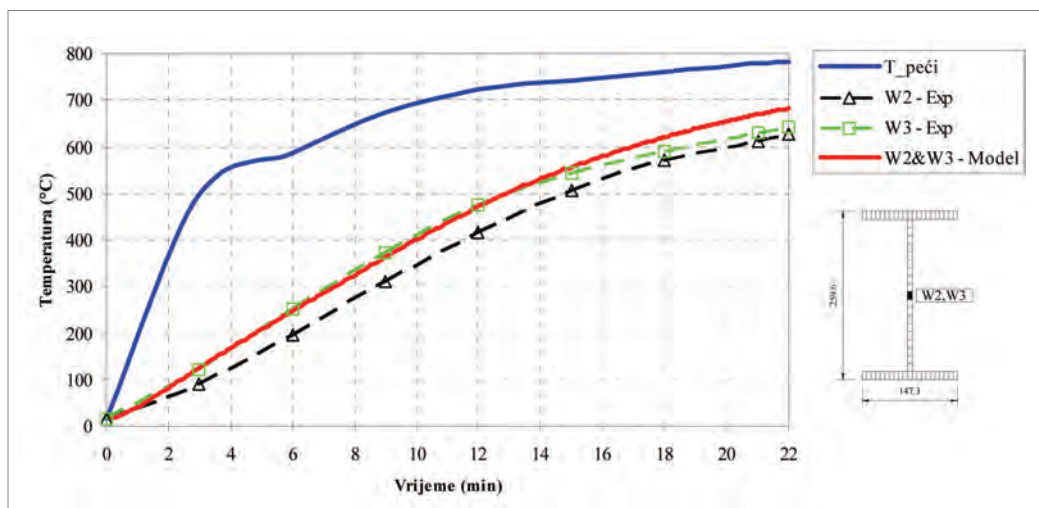
Simulacija eksperimenta provedena je za dva različita tipa ulaznih mehaničkih karakteristika: eksperimentalno određeni dijagrami naprezanje-deformacija na visokim temperaturama [20], koji odgovaraju čeliku kvalitete S275 od kojeg je element izrađen i dijagrami naprezanje-deformacija koji su dani u normi EN1993-1-2 [21] za potrebe inženjerskih proračuna ponašanja čeličnih konstrukcija u požaru, kao što je prikazano na slikama 8. i 9.

Na slikama od 10. do 13. prikazani su rezultati dobiveni eksperimentom Wainmana i Kirbyja zajedno s rezultatima dobivenim modelom u karakterističnim točkama čeličnog nosača.

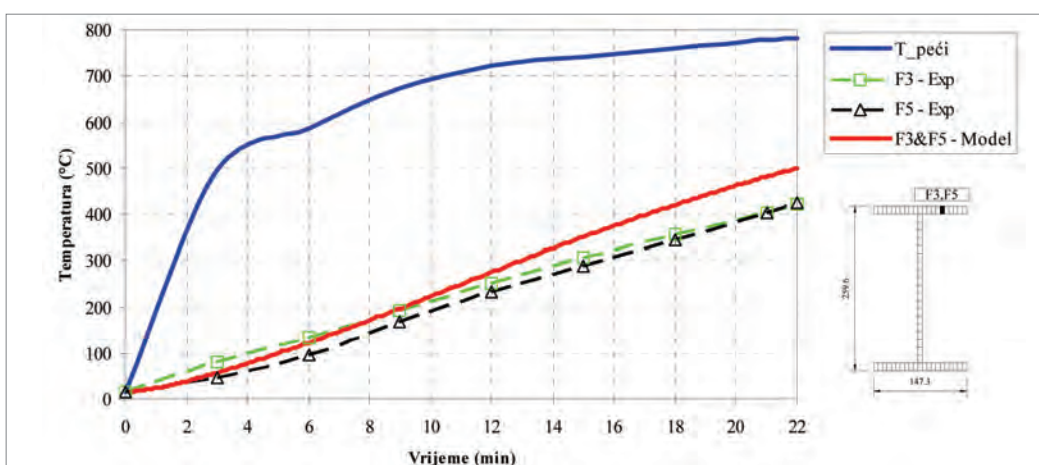
Na slici 14. prikazana je usporedba rezultata izmjerenih vertikalnih progiba u polovini nosača preuzetih iz eksperimenta koji su proveli Wainman i Kirby i rezultata opisanog modela.



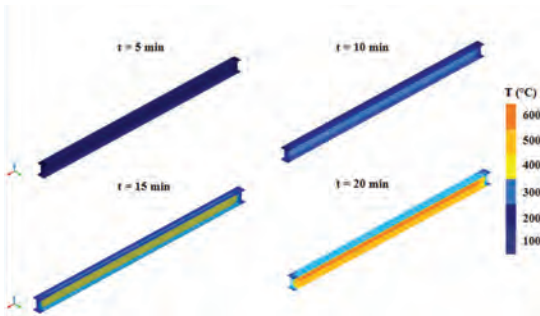
Slika 10. Usporedba rezultata razvijenih temperatura dobivenih eksperimentom i modelom – donja pojasnica



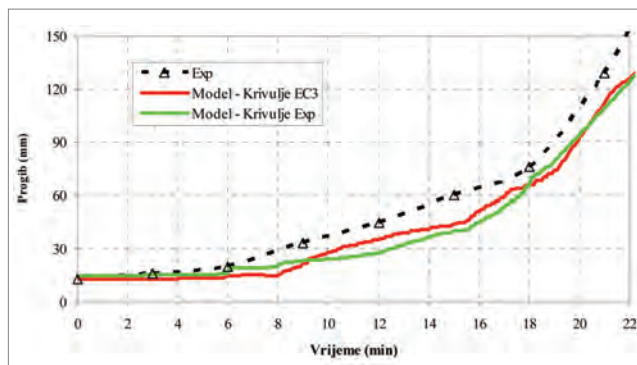
Slika 11. Usporedba rezultata razvijenih temperatura dobivenih eksperimentom i modelom – hrbat



Slika 12. Usporedba rezultata razvijenih temperatura dobivenih eksperimentom i modelom – gornja pojasnica



Slika 13. Prikaz temperaturnog polja u diskretnim vremenskim intervalima u čeličnom nosaču



Slika 14. Usporedba vertikalnih progiba dobivenih eksperimentom s predviđanjima modela

LITERATURA

- [1] Boko, I.; Peroš, B.; Torič, N.: *Pouzdanost čeličnih konstrukcija u požaru*, Građevinar 62, 2010., 5, 389-400.
- [2] Boko, I.; Peroš, B.: *Sigurnost nosivih čeličnih konstrukcija pri djelovanju požara*, Građevinar 54, 2002., 11, 643-656.
- [3] Wang, Y. C.; Lennon, T.; Moore, D. B.: *The Behaviour of Steel Frames Subject to Fire*, Journal of Constructional Steel Research 35, 1995., 291-322.
- [4] Terro, M. J.: *Numerical Modeling of the Behaviour of Concrete Structures in Fire*, ACI Structural Journal 95, 1998., 2, 183-193.
- [5] Elghazouli, A. Y.; Izzuddin, B. A.: *Response of Idealized Composite Beam-Slab Systems under Fire Conditions*, Journal of Constructional Steel Research 56, 2000., 3, 199-224.
- [6] Wu B.; Lu, J. Z.: *A Numerical Study of the Behaviour of Restrained RC Beams at Elevated Temperatures*, Fire Safety Journal 44, 2009., 4, 522-531.
- [7] Youssef, M. A.; Mofteh, M.: *General Stress-Strain Relationship for Concrete at Elevated Temperatures*, Engineering Structures 29, 2007., 10, 2618-2634.
- [8] Kodur, V. K. R.; Dwaikat, M. M. S.: *Response of Steel Beam-Columns Exposed to Fire*, Engineering Structures 31, 2009., 2, 369-379.
- [9] Dwaikat, M. B.; Kodur, V. K. R.: *A Numerical Approach for Modelling the Fire Induced Restraint Effects in Reinforced Concrete Beams*, Fire Safety Journal 43, 2008., 4, 298-307.
- [10] Prezemieniecki, J. S.: *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [11] Bangash, M. J. H.: *Concrete, Concrete structures, Numerical Modeling, Applications*, Elsevier Applied Science, New York, 1989.
- [12] Radnić, J.; Harapin, A.; Markić R.: *Ispitivanja utjecaja spona na nosivost betonskih greda pri tlačnom slomu*, Građevinar 59 (9) 2007., 789-795.
- [13] Mihanović, A.; Marović, P.; Dvornik, J.: *Nelinearni proračuni armirano betonskih konstrukcija*, DHGK, Zagreb, 1993.
- [14] Liew, J. Y. R.; Chen, W. F.; Chen H.: *Advanced Inelastic Analysis of Frame Structures*, Journal of Constructional Steel Research 55, 2000., 1-3, 245-265.
- [15] Sapountzakis, E. J.; Mokos, V. G.: *3-D Beam Element of Composite Cross Section Including Warping and Shear Deformation Effects*, Computers and Structures 85, 2007., 1-2, 102-116.
- [16] Yang, Y. B.; Kuo, S. R.; Wu, Y. S.: *Incrementally small-deformation theory for nonlinear analysis of structural frames*, Engineering Structures 24, 2002., 6, 783-798.
- [17] Trogljić, B.; Mihanović, A.: *The Comparative Body Model in Material and Geometric Nonlinear Analysis of Space R/C frames*, Engineering Computations 25, 2008., 2, 155-171.
- [18] Trogljić, B.; Harapin, A.; Mihanović, A.: *The Null Configuration Model in limit load analysis of steel space frames*, Materialwissenschaft und Werkstofftechnik 42, 2011., 5, 417-428.
- [19] Radnić, J.; Harapin, A.: *Model dimenzioniranja kompozitnih poprečnih presjeka opterećenih na savijanje*, Građevinar 45, 1993., 7, 379-389.
- [20] Wainman, D. E.; Kirby, B. R.: *Compendium of UK Standard Fire Test Data: Unprotected Structural Steel - 1 & 2*, British Steel Corporation, 1988.
- [21] EN 1993-1-2:2005, *Eurocode 3 - Design of steel structures - Part 1-2: General Rules - Structural fire design*, European Committee for Standardization, Brussels, 2005.

4. Zaključak

Usporedbom rezultata razvijenih temperatura dobivenih eksperimentom i prikazanim numeričkim modelom vidljivo je da model zadovoljavajućom točnošću predviđa prirast temperatura u karakterističnim točkama čeličnog nosača na donjoj pojasnici, hrptu i gornjoj pojasnici (slike 10 do 12). Mogući razlog odstupanja temperatura dobivenih modelom u odnosu na eksperiment jest taj što je kao ulazni parametar u modelu zadana srednja temperatura peći, definirana u relativno malom broju točaka koje nisu dovoljne za precizan opis temperaturnih rubnih uvjeta u eksperimentu. Prikazani model dovoljno precizno predviđa progibe elementa u vremenskom intervalu od 22 minute, sa značajnim odstupanjem progiba nakon 14 minuta od početka eksperimenta (slika 14.). Tada se u nosaču razvijaju temperature više od 450°C i onda puzanje čelika na visokim temperaturama uvelike utječe na deformacije konstrukcije, odnosno progibe nosača. Relativno mala odstupanja u predviđanju progiba se javljaju za dva različita tipa krivulja naprezanje-deformacija, što upućuje na činjenicu da su predložene krivulje naprezanje-deformacija prema Eurokodu 3 za slučaj djelovanja požara dovoljno precizne za modeliranje ponašanja čeličnih konstrukcija u požaru. Budući razvoj modela bit će usmjeren na implementaciju različitih implicitnih i eksplicitnih modela puzanja čelika na visokim temperaturama radi preciznijega predviđanja progiba elemenata na visokim temperaturama.