

Novi model za stohastičku analizu trajnosti mostova

Goran Puž, Jure Radić, Irina Stipanović Oslaković

Ključne riječi

most,
trajnost mostova,
gospodarenje
građevinama,
matematički model,
Markovljev proces,
Šibenski most

Key words

bridge,
bridge durability,
management of structures,
mathematical model,
Markov process,
Šibenik bridge

Mots clés

pont,
durabilité des ponts,
gestion des structures,
modèle mathématique,
processus de Markov,
pont de Šibenik

Ключевые слова

мост,
долговечность моста,
управление
строительными
объектами,
математическая модель,
марковский процесс,
Шибенский мост

Schlüsselworte

Brücke,
Brückendauerhaftigkeit,
Waltung von Bauwerken,
mathematisches Modell,
Markov's Prozess,
Šibenik-Brücke

G. Puž, J. Radić, I. Stipanović Oslaković

Izvorni znanstveni rad

Novi model za stohastičku analizu trajnosti mostova

Analizira se proces dotrajavanja i razrađuje model planiranja održavanja mostova. Prikazani su postupci za ocjenu stanja mosta i postojeći modeli za prognozu napredovanja procesa dotrajavanja, na temelju kojih se mogu donositi odluke o gospodarenju građevinama. Analizom postojećih postupaka izvedene su značajke matematičkog modela procesa dotrajavanja armiranobetonskih mostova, zasnovanog na Markovljevim procesima. Primjenjivost modela prikazana je na primjeru Šibenskog mosta.

G. Puž, J. Radić, I. Stipanović Oslaković

Original scientific paper

A new model for stochastic analysis of bridge durability

The ageing process is analyzed, and a bridge maintenance planning model is described. The bridge condition checking procedures, and the existing models for estimating advancement of ageing process, are presented as basis for making proper structural management decisions. The analysis of existing procedures has resulted in the definition of main features of a mathematical model, based on Markov processes, that is used for defining the ageing process of reinforced-concrete bridges. The applicability of the model is shown on the concrete example of Šibenik bridge.

G. Puž, J. Radić, I. Stipanović Oslaković

Ouvrage scientifique original

Un nouveau modèle pour l'analyse stochastique de la durabilité des ponts

Le processus de détérioration est analysé, et le modèle de planification de l'entretien des ponts est décrit. Les procédures d'inspection de la condition des ponts, et les modèles existants pour estimer l'avancement de détérioration, sont présentées comme base pour faire des décisions sur la gestion des structures. Suite à l'analyse des procédés existants, les propriétés d'un modèle mathématique basé sur le processus de Markov sont dérivées. Ce modèle est utilisé pour définir le processus de détérioration des ponts en béton armé. L'applicabilité du modèle est présentée sur l'exemple du pont de Šibenik.

Г. ПуЖ, Й. Радич, И. Сипанович Ослаковић

Оригинална научна работа

Новая модель стохастического анализа долговечности мостов

Анализируется процесс изнашивания, разрабатывается модель планирования технического обслуживания мостов. Приведены процедуры оценки состояния мостов и существующие модели прогнозирования развития процесса изнашивания, позволяющие принимать решения по управлению строительными объектами. Путем анализа существующих процедур получены характеристики математической модели процесса изнашивания железобетонных мостов, базирующиеся на марковских процессах. Применимость модели показана на примере Шибенского моста.

G. Puž, J. Radić, I. Stipanović Oslaković

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Ein neues Modell für die stochastische Analyse der Dauerhaftigkeit von Brücken

Man analysiert den Prozess der Abnutzung von Brücken und erbringt ein Planungsmodell deren Wartung. Dargestellt sind Verfahren für die Abschätzung des Zustands der Brücke und bestehende Modelle für die Prognose des Fortschritts der Abnutzung, auf Grund dessen man Entscheidungen über die Wartung des Bauwerks erbringen kann. Durch Analyse der bestehenden Verfahren wurden Eigenschaften eines mathematischen Modells des Abnutzungsprozesses von Stahlbetonbrücken erbracht, begründet auf Markov's Prozessen. Die Anwendbarkeit des Modells ist am Beispiel der Šibenik-Brücke dargestellt.

Autori: Dr. sc. **Goran Puž**, dipl. ing. građ., prof. dr. sc. **Jure Radić**, dipl. ing. građ., dr. sc. **Irina Stipanović Oslaković**, dipl. ing. građ., Institut IGH d.d., J. Rakuše 1, Zagreb

1 Uvod

Sve građevine s vremenom gube početne značajke kroz procese koje skupnim imenom nazivamo *dotrajavanjem*¹. Traženu razinu uporabljivosti vlasnik ili upravitelj građevina kontrolira pregledima i održava popravcima. Kada se radi o infrastrukturnim sustavima, planiranje održavanja prelazi u gospodarenje građevinama, djelatnost koja obuhvaća širok vremenski raspon, kroz analize prošlih zbivanja, operativne odluke sadašnjosti, kao i prognoze budućeg stanja iz kojega proizlaze kratkoročni i dugoročni financijski planovi. Zbog toga se intenzivno istražuju značajke građiva, konstrukcija i građevina koje ovise o vremenu. Na temelju ovih istraživanja razrađuju se modeli za predviđanje tijeka procesa dotrajavanja, kako bi se popravci mogli planirati tako da uz minimum ulaganja građevina zadrži dostatnu razinu uporabljivosti i sigurnosti tijekom predviđenoga uporabnog vijeka [1].

U radu su opisani neki od postojećih modela za prognozu napredovanja procesa dotrajavanja koji su namijenjeni podršci pri donošenju odluka o održavanju mostova (slika 1.). Analiziraju se iskustva s dotrajavanjem i održavanjem betonskih mostova u primorskom okolišu [2], na temelju kojih je razrađen novi postupak za modeliranje procesa dotrajavanja primjenom homogenog Markovljeva procesa. Model je izveden na primjeru betonskih konstrukcija izloženih koroziji armature potaknute prodorom klorida u beton, ali se može primijeniti za druge mehanizme dotrajavanja i druge tipove građevina.

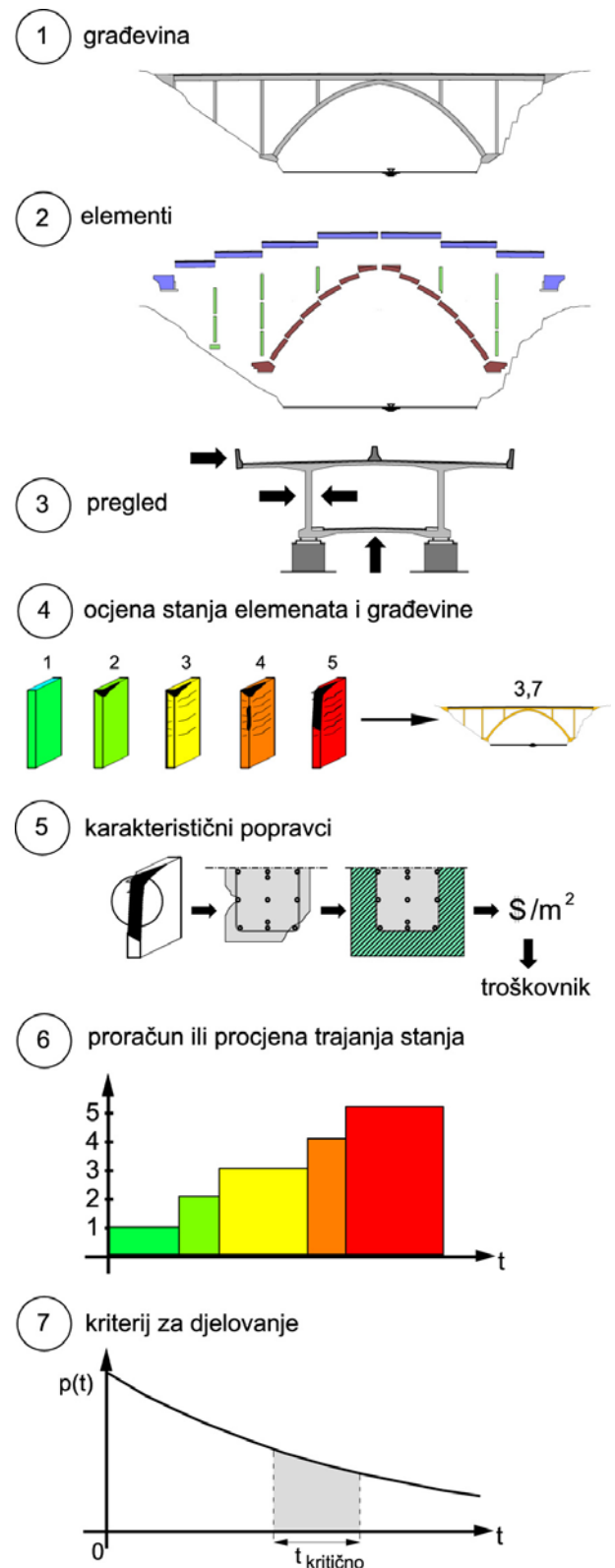
Pri razradi sustava gospodarenja građevinama (takav je projekt, primjerice, u tijeku u poduzeću Hrvatske autoceste d.o.o. [3]) prikuplja se velika količina podataka o stanju građevina, no i pored toga tijekom dotrajavanja prate mnoge nepoznanice. Novi je model dovoljno fleksibilan da bi se obradom manjkavih podataka izvela probabilistička procjena budućeg tijeka procesa i omogućila razmatranja varijanti planova održavanja uz budžetska ograničenja.

2 Sustavi ocjenjivanja mostova

Procesima dotrajavanja stanje mosta kontinuirano se mijenja tijekom vremena. Budući da bi model kontinuiranog praćenja stanja bio složen, prepoznaju se određene karakteristične faze procesa i prati se vjerojatnost prelaska iz jedne faze u drugu. Prema tome, prvi problem koji se rješava odnosi se na definiranje stanja mosta s motrišta održavanja, sustavima za ocjenjivanje.

Stanje mosta ne predstavlja veličinu koja se može deterministički izmjeriti, već pri njegovu određivanju postoji znatna nesigurnost i mogućnost odstupanja stvarnog sta-

nja od opaženog koja s vremenom postaje sve veća [4]. Ocjenjivanje mosta ili dijela mosta ima za cilj definirati



Slika 1. Djelatnosti obuhvaćene gospodarenjem građevinama (mostovima)

¹ Pojam *deterioration* neki prevode s **propadanje**, no ona u našem jeziku ima katastrofičan prizvuk, pa je radije odobrana riječ **dotrajavanje**

pokazatelj stanja (stupnja dotrajalosti) u danom trenutku na temelju vrijednosti opaženih ili izmjerenih parametara.

Općenito gledajući, stanje svake građevine moglo bi se definirati skupom mjerljivih parametara kojima su izražene geometrijske, fizikalne, kemijske i druge značajke građevina. Načelno bi se moglo reći da je stanje promatrane građevine opisano n-dimenzijskim vektorom (vektor stanja). Nezgoda je u tom pristupu što se višedimenzionalni vektori ne mogu međusobno uspoređivati, poput realnih brojeva, tako da se, primjerice, za dvije promatrane građevine na temelju odgovarajućih vektora stanja ne može zaključiti koja je u "boljem stanju".

Postojeći postupci za ocjenu stanja mosta ili elementa mosta u sustavu gospodarenja mostovima, koji se primjenjuju u Japanu i nekim europskim zemljama, zasnovani su na klasifikaciji oštećenja u nekoliko kategorija [5]. Pojedine kategorije oštećenja uključuju usporedive i slične pojave, kako bi se izvješća o nalazu pregleda izjednačila i svela na mali broj tipova. Kako su razlike u postupcima pojedinih zemalja više terminološke nego stvarne, u tablici 1. prikazana je klasifikacija koja ilustrira koncept. Broj stupnjeva u ljestvici uobičajeno je između tri i deset [6].

Tablica 1. Jedna od mogućih klasifikacija za ocjenu oštećenja građevine (mosta)

Klasa	Oštećenje	Opis
1	nema	nema oštećenja ili su zanemariva
2	malo	dugoročno planirati popravak
3	srednje	popravak planirati u kratkom roku
4	veliko	popravak se mora izvršiti odmah
5	vrlo veliko	popravak odmah uz ograničenje uporabe građevine
6	za otpis	nije moguće (isplativo) daljnje održavanje

U SAD-u se od početka 90-ih godina prošlog stoljeća razvija drugačija ljestvica za ocjenjivanje stupnja dotrajalosti [7]. Uočeno je da se može raspoznati jedan ključni proces koji upravlja brzinom dotrajavanja i prolazi kroz karakteristične faze povezane s određenim radovima na popravcima. Ocjena stanja, koja se dodjeljuje tijekom rutinskog pregleda mosta prema pristupu ilustriranom tablicom 1., ne prepoznaje posebne procese dotrajavanja, pa se prišlo razvijanju ljestvica za pojedine mehanizme dotrajavanja [8].

Ljestvica se konstruira tako da svaki stupanj dotrajavanja bude prepoznatljiv prema fizikalnim i funkcijskim značajkama vrednovanog elementa konstrukcije. Svako-

me od prepoznatih stanja pridruženi su standardni radovi na popravcima, pa je tako ocjena elementa povezana s tipskim troškovnikom. Povezivanje tehničke ocjene stanja s cijenom popravka ključni je element komunikacije upravitelja građevine i inženjera koji obavlja periodičke preglede.

Budući da stupnjevi odražavaju i prate neki proces koji narušava izvorno stanje, rabi se termin stupnjevi dotrajavanja. Broj stupnjeva dotrajavanja nije isti za svaki proces i za svaku građevinu, ali načelno se može formirati tablica s 5 stupnjeva prema (tablica 2.).

Tablica 2. Općeniti prikaz stupnjeva dotrajavanja [7]

Stupanj	Opis
1	zaštićeno element je zaštićen od agresivnih djelovanja, npr. oblogom ili premazom
2	izloženo zaštita elementa otkazuje ili nije izvedena
3	ugroženo djeluje proces dotrajavanja, ali sam element nije oštećen
4	napadnuto proces razara promatrani element
5	oštećeno nosivost elementa je smanjena

3 Modeli za predviđanje dotrajavanja

Postoje različiti pristupi i mogućnosti za izgradnju teorijskih modela koji su namijenjeni prognoziranju ponašanja građevina tijekom vremena. Grubo govoreći, može se reći da postoje matematički i fizikalni modeli dotrajavanja. Dok se matematički modeli formiraju na osnovi statističke obrade podataka o stanju velikog broja mostova, fizikalni modeli zasnovani su na poznavanju fizikalnih i kemijskih pojava koje uzrokuju dotrajavanje građevine.

Stariji modeli ocjenjivali su preostali uporabni vijek, odnosno razdoblje nakon kojeg građevina dolazi u stanje u kojemu više ne može održavati svoju funkciju. Noviji modeli razrađuju se tako da prepoznaju specifične faze u procesu dotrajavanja i omogućuje planiranje radova na održavanju.

3.1 Fizikalni modeli dotrajavanja

Fizikalni, mehanički i kemijski procesi koji upravljaju razaranjem betona i armature mogu se opisati osnovnim prirodnim zakonima, pa se nastoje formulirati inženjerski modeli proračuna uporabnog vijeka armiranobetonskih konstrukcija. Takvi modeli u praksi nisu osobito pouzdani zbog heterogenosti i poroznosti strukture betona, poteškoća oko definiranja i mjerenja relevantnih pa-

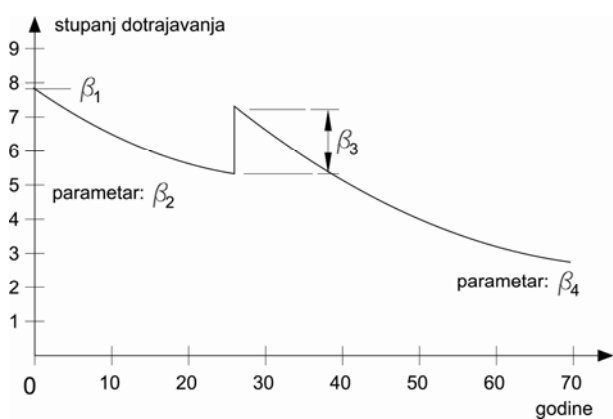
rametara, kao i zbog teškoća u definiranju složenih i kombiniranih djelovanja iz okoliša [9].

Za mostove ugrožene penetracijom klorida iz okoliša, proračuna se vrijeme potrebno da kritična razina agensa dosegne razinu armature. Jednom kada je korozija započela, proračuna se vrijeme potrebno da proces uništi određeni postotak volumena armaturne šipke ili vrijeme do odlamanja zaštitnog sloja betona. Ovi su modeli deterministički i rezultiraju vremenom do dolaska u neprihvatljivo stanje, jedinstvenim rezultatom za svaku skupinu ulaznih parametara [10].

3.2 Regresijski modeli dotrajavanja

Postupci razrađeni u SAD-u zasnovani su na statističkoj obradi podataka iz Nacionalnog registra mostova koji obuhvaća podatke o približno 650 tisuća građevina [11]. Promatrane su ocjene općeg stanja, prema ljestvici raspona od 0 do 9. Ocjenjivanje se provodilo svake dvije godine, pa je promatran niz rezultata kroz desetogodišnje ili dulje razdoblje. Načinjeno je više studija stanja i modela napredovanja procesa dotrajavanja. Izdvojene su skupine mostova sličnih značajki da bi na njima bila istražena veza starosti s ocjenom općeg stanja.

Za rješavanje navedenog problema primijenjen je jednodimenzijski regresijski model u kojem je vrijeme t neslužajna varijabla, a ocjena stanja građevine S slučajna varijabla. U tom se modelu pretpostavlja oblik regresijske funkcije μ i razvija algoritam za određivanje tih parametara na temelju statističkih podataka. Na temelju regresijske funkcije dobiva se tzv. regresijska krivulja (grafikon regresijske funkcije) koja zorno prikazuje "trend", tj. vremensku ovisnost promatrane pojave (stanja građevine).



Slika 2. Ocjena stanja mosta tijekom vremena prema modelu za prognozu razrađenom u SAD-u

Za regresijsku funkciju odabrana je eksponencijalna funkcija. Unutar modela predviđeno je i poboljšanje stanja (skokovit prirast) do kojeg dolazi pri obavljanju

popravaka. Model s četiri parametra predviđa jedan popravak, odnosno unapređenje stanja tijekom uporabnog vijeka (slika 2.).

Pretpostavlja se da regresijska funkcija sadrži 4 parametra, β_1 , β_2 , β_3 i β_4 , koji se određuju statističkom obradom podataka o dotrajavanju i popravcima mostova. Regresijska funkcija ima sljedeći oblik:

$$\mu(t) = \begin{cases} \beta_1 e^{-\frac{t}{\beta_2}}, & \text{za } 0 \leq t < t_r \\ \left(\beta_1 e^{-\frac{t}{\beta_2}} + \beta_3 \right) e^{-\frac{(t-t_r)}{\beta_4}}, & \text{za } t \geq t_r \end{cases} \quad (1)$$

gdje je:

- $\mu(t)$ - vrijednost regresijske funkcije, tj. očekivano stanje građevine u trenutku t (skala od 0 do 9)
- e - baza prirodnog logaritma
- t - starost mosta u godinama
- t_r - starost mosta u trenutku kada se provodi veći zahvat na održavanju
- β_1 - vrijednost regresijske funkcije u trenutku $t = 0$
- β_2 i β_4 - koeficijenti dotrajavanja
- β_3 - koeficijent koji definira poboljšanje stanja prigodom popravka

3.3 Stohastički model zasnovan na teoriji Markovljevih lanaca

U prethodnom poglavlju prikazano je istraživanje funkcijske ovisnosti stupnja dotrajivosti o vremenu. Pri probabilističkom pristupu proces dotrajavanja mosta promatra se kao stohastički proces. Među prvim stohastičkim modelima razrađen je model za predviđanje budućeg dotrajavanja primjenom teorije Markovljevih lanaca [4].

Teorija Markovljevih procesa razvijena je za modeliranje slijeda događaja u fizikalnim, elektrotehničkim ili biološkim sustavima. *Markovljev je lanac* poseban slučaj Markovljeva procesa s diskretnim parametrom [12] koji je, u našem slučaju, vrijeme. S pomoću Markovljeva lanca proračuna se vjerojatnost da se most ili element mosta u određenom trenutku nađe u određenom stupnju dotrajivosti. Broj stanja (stupnjeva dotrajivosti) u kojima se Markovljev proces može naći je konačan.

Za određivanje vjerojatnosti da se proces u nekom diskretnom trenutku vremena t_n nađe u stanju S , potrebno je poznavati početne vjerojatnosti stanja i prijelazne vjerojatnosti:

p_{ij} ($i \neq j$) - vjerojatnost da proces prijeđe iz stanja i u trenutku t_n u stanje j u trenutku $t_{n+1} > t_n$

p_{ii} - vjerojatnost da proces ostane u stanju i u vremenu od trenutka t_n do t_{n+1} .

Pretpostavlja se da je riječ o homogenom Markovljevu lancu kod kojega prijelazne vjerojatnosti ne ovise o vremenu (t_n, t_{n+1})

Prijelazne vjerojatnosti p_{ij} formiraju matricu prijelaznih vjerojatnosti \mathbf{P} . Promatra se proces koji ima konačan broj r diskretnih stanja. U tom slučaju matrica \mathbf{P} prijelaznih vjerojatnosti je kvadratna matrica r -tog reda s elementima p_{ij} , pri čemu vrijedi $0 \leq p_{ij} \leq 1$.

Osim matrice prijelaznih vjerojatnosti, za određivanje vjerojatnosti stanja procesa u nekom trenutku u budućnosti potrebno je poznavati i vektor vjerojatnosti početnog stanja:

$$\mathbf{p}(0) = [p_1(0) \quad p_2(0) \quad p_3(0) \dots p_r(0)]$$

gdje $p_i(0)$ ($i = 1, \dots, r$) označuje vjerojatnost da se proces u početnom trenutku ($t=0$) nađe u i -tom stanju.

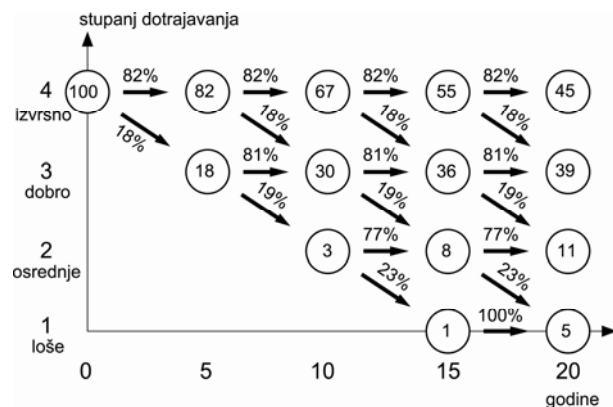
Uz poznatu matricu prijelaznih vjerojatnosti i poznati vektor vjerojatnosti početnog stanja može se odrediti vektor vjerojatnosti stanja $\mathbf{p}(t_n)$ u bilo kojem trenutku t_n . Vektor vjerojatnosti stanja iskazuje vjerojatnosti da proces u određenom trenutku t_n poprimi neko od r stanja, a izražen je matricnom jednadžbom:

$$\mathbf{p}(t_n) = \mathbf{p}(0) \mathbf{P}^n \quad (2)$$

Vektor vjerojatnosti stanja (ili stupnjeva dotrajavanja) odnosi se na trenutačno stanje elementa za koji se radi predviđanje. Matrica prijelaznih vjerojatnosti \mathbf{P} predstavlja povijesno svjedočanstvo o tome kako elementi sličnog tipa i starosti dotrajavaju. Prema tome, predviđanje se zasniva na najnovijim podacima o stupnju dotrajivosti pojedinog elementa (vektor stanja $\mathbf{p}(0)$) i podacima o tome kako su slični elementi dotrajivali (matrica prijelaznih vjerojatnosti \mathbf{P}).

Konkretno, poznatim koeficijentima prijelaza iz jednog stanja u drugo proračuna se vjerojatnost da će se neki element sustava naći u određenom stupnju dotrajavanja u određenom trenutku u budućnosti. Takvi modeli uključeni su u sustav upravljanja mostovima u nekim državama SAD-a i u kanadskoj pokrajini Ontario [4].

Grafički prikaz modela namijenjenog prognozi dotrajavanja mostova ili elemenata mostova koji je zasnovan na teoriji Markovljeva lanca prikazan je na slici 3. Vjerojatnosti prijelaza iz stanja u stanje prikazane su postocima. Smisao postupka je u tome da se izvede zaključak o potrebnom održavanju koji bi mogao glasiti:



Slika 3. Grafički prikaz modela zasnovanog na teoriji Markovljeva lanca

Od 100 novih mostova nakon 20 godina u lošem stanju bit će ih 5, pa za njih treba osigurati sredstva za rekonstrukciju, dok će ih 11 biti potrebno popraviti.

3.4 Kritički osvrt na postojeće modele

- 1) Fizikalni modeli su kompleksni, a proces dotrajavanja može uključivati više različitih mehanizama koji djeluju simultano ili u različitim fazama procesa (napredovanje procesa nije homogeno po promatranim elementima). Dakle, potrebno je više modela kako bi se opisao proces dotrajavanja, a na jednom elementu mogu se prepoznati područja koja se nalaze u više mogućih različitih stupnjeva dotrajivosti [13].
- 2) Regresijski modeli izvedeni su statističkom obradom velike količine podataka prikupljenih u sklopu sustava gospodarenja. Predviđanje stanja prema ovim modelima zasniva se na vremenskom nizu ocjena stanja postojećih mostova, bez obzira na proces koji ih je u to stanje doveo. Postupak ne prepoznaje ključni proces dotrajavanja.
- 3) Stohastički model zasnovan na teoriji Markovljevih lanaca zahtijeva poznavanje matrice prijelaznih vjerojatnosti, koja se formira na temelju rezultata provedenih pregleda i ispitivanja. Korektan postupak zahtijeva konzistentne podatke o redovito izvršenim periodičkim pregledima.

Općenito, pojam "vjerojatnosti prijelaza iz jednog stanja u drugo" nije blizak inženjerskom načinu razmišljanja, a proračun elemenata matrice prijelaznih vjerojatnosti može biti zahtjevan postupak.

Iz svega iznesenog izvedene su sljedeće odrednice za uvođenje i razradu novog modela:

- a) proces dotrajavanja u realnim okolnostima ima slučajnu prirodu pa ga treba promatrati kao stohastički proces

- b) fizikalno-kemijski modeli su prikladno oruđe za predviđanje vremena trajanja pojedinih faza procesa
- c) podaci o stanju mosta sustavno se prikupljaju obavljanjem periodičkih pregleda
- d) složenija ispitivanja, koja mogu prepoznati faze procesa dotrajavanja koje nisu uočljive pri vizualnom pregledu, poduzimaju se razmjerno rijetko.

4 Novi model zasnovan na homogenim Markovljevim procesima

4.1 Uvod

Pri razradi novog modela primijenjena je teorija homogenih Markovljevih procesa s konačnim skupom stanja i kontinuiranim parametrom, za razliku od prije razrađenog modela koji se koristi teorijom konačnih Markovljevih lanaca. Markovljevi procesi opisuju fizičku stvarnost gdje se promjene tijekom vremena odvijaju na slučajan način tako da vjerojatnosti stanja procesa u budućnosti ovise samo o stanju procesa u sadašnjosti a ne ovise o tijeku procesa u prošlosti. Ta pretpostavka omogućuje izgradnju sofisticirane matematičke teorije, veoma pogodne za primjenu u različitim područjima istraživanja.

Bitno je uočiti da osnovno Markovljevo svojstvo (samo sadašnjost određuje budućnost, a ne i prošlost) ima značenje matematičke pretpostavke, dok je povijest dotrajavanja zapravo sadržana u rezultatima na temelju kojih su određeni parametri modela.

Problem se rješava analitički, odnosno izvode se egzaktne formule koje omogućuju proračunavanje vjerojatnosti stanja građevine u svakom trenutku vremena, a zatim i druge relevantne parametre za ocjenu globalnog stanja (stupnja dotrajalosti).

Pretpostavlja se da su poznate (opažene, izmjerene ili procijenjene) određene veličine (parametri) koje zahtijeva teorijski model da bi se matematičkim putem izvele tražene veličine, odnosno vjerojatnosti stanja građevine [14].

4.2 Teorijska razrada

Osnovna formula teorije homogenog Markovljeva procesa u kojem postoji r mogućih stanja glasi:

$$p_j(t) = \sum_{i=1}^r p_i(0) p_{ij}(t), \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (3)$$

gdje je:

$p_j(t)$ - vjerojatnost da se proces u trenutku t nađe u stanju j

$p_i = p_i(0)$ - vjerojatnost da proces počinje ($t = 0$) iz i -tog stanja ($\sum_{i=1}^r p_i = 1$)

$p_{ij}(t)$ ($i \neq j$) - vjerojatnost da proces prijeđe iz stanja i u stanje j kroz vrijeme t

$p_{ii}(t)$ - vjerojatnost da proces ostane u stanju i tijekom vremena t .

Formulom (3) obuhvaćeno je r jednadžbi koje možemo interpretirati na sljedeći način:

U početnom trenutku $t = 0$ proces se može naći u bilo kojem od stanja $1, 2, \dots, r$ s odgovarajućim vjerojatnostima $p_1(0), p_2(0), \dots, p_r(0)$. Prijelaz iz i -tog u j -to stanje u trenutku $t > 0$ odvija se s vjerojatnošću $p_{ij}(t)$, pa je totalna vjerojatnost da se proces u trenutku $t > 0$ nađe u j -tom stanju jednaka sumi vjerojatnosti svih mogućih dolazaka u j -to stanje.

Teorija homogenih Markovljevih procesa jamči da vrijedi:

$$\sum_{j=1}^r p_{ij}(t) = 1, \quad \sum_{j=1}^r p_j(t) = 1 \quad t \geq 0 \quad (4)$$

Prvom formulom u (4) izrečeno je da proces tijekom vremena t sigurno dolazi u jedno od stanja $1, 2, \dots, r$ ako je u početku bio u i -tom stanju. Druga formula u (4), pak, izriče očiglednu činjenicu da je u svakom trenutku t proces u nekom od stanja $1, 2, \dots, r$, s vjerojatnošću 1.

Očito je:

$$p_{ij}(0) = 0, \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, r)$$

$$p_{ii}(0) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5)$$

jer je nemoguće da proces promijeni stanje ($i \neq j$) kroz vrijeme $t = 0$, dok je sigurno da ostaje u istom stanju (i).

Određivanje veličina $p_j(t)$ iz temeljne formule (3) zahtijeva poznavanje početnih vjerojatnosti stanja $p_i(0)$, što su određeni brojevi i prijelaznih vjerojatnosti $p_{ij}(t)$ ($t > 0$), koji su određene funkcije.

Osnovna se formula (3) može napisati kao:

$$p_j(t) = p_1(0) p_{1j}(t) + p_2(0) p_{2j}(t) + \dots + p_r(0) p_{rj}(t), \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

Iz formule (6) vidi se da je za određivanje vjerojatnosti stanja j u danom trenutku t potrebno znati prijelazne vjerojatnosti $p_{ij}(t)$ koje se izvode iz nekih pretpostavki,

na primjer o fizikalno – kemijskom procesu (ili procesima) dotrajavanja mosta. Budući da je riječ o funkcijama, to će redovito biti težak problem koji se u praksi često i ne može riješiti. Povoljna je, međutim, okolnost da Markovljevo svojstvo ("samo sadašnjost utječe na budućnost, a ne i prošlost") omogućuje određivanje funkcija $p_{ij}(t)$, $t > 0$ na temelju njihovih "infinitesimalnih osobina". To znači da teorija homogenih Markovljevih procesa jamči da funkcije $p_{ij}(t)$ zadovoljavaju određene diferencijalne jednadžbe u kojima se kao koeficijenti pojavljuju veličine:

$$\lambda_{ij} = \frac{dp_{ij}(0)}{dt}, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (7)$$

gdje je $\frac{dp_{ij}(0)}{dt}$ vrijednost derivacije funkcije $p_{ij}(t)$ po varijabli t , za $t = 0$.

Teorijskim putem dokazuje se da je:

$$\sum_{j=1}^r \lambda_{ij} = 0, \quad \lambda_{ii} \leq 0, \quad \lambda_{ij} \geq 0, \quad \text{za } i \neq j \quad (8)$$

Veličina λ_{ij} ($i \neq j$) interpretira se kao "intenzitet prijelaza" iz i -tog u j -to stanje.

Uvede li se oznaka Z_i , sa značenjem vremena boravka procesa u i -tom stanju, teorija homogenih Markovljevih procesa pokazuje da je Z_i ($i = 1, \dots, r$) slučajna varijabla kojoj pripada eksponencijalna razdioba s parametrom $-\lambda_{ii} = \lambda_i \geq 0$, iz čega slijedi da je očekivano vrijeme boravka procesa u stanju i :

$$E[Z_i] = \frac{1}{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, r \quad (9)$$

Kada bi bilo $\lambda_i = 0$, dobije se da je $E[Z_i] = \infty$, tj. kada proces dospje u stanje i , zauvijek ostaje u tom stanju. Tada se i zove apsorbirajuće stanje. Pojam *vremena boravka procesa u nekom stanju* praktičniji je za inženjerska razmatranja od *vjerojatnosti prijelaza iz jednog stanja u drugo*.

Ako su poznate vrijednosti veličina λ_{ij} , zaključujemo da se rješavanjem odgovarajućih diferencijalnih jednadžbi mogu odrediti funkcije $p_{ij}(t)$, dakle i $p_{ij}(t)$ ($t > 0$).

Sustav diferencijalnih jednadžbi kojima su povezane funkcije $p_{ij}(t)$ i konstante (parametri) λ_{ij} , kako to pokazuje teorija homogenih Markovljevih procesa, u matričnom se obliku (*Kolmogorovljeva diferencijalna jednadžba*) zapisuju ovako:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \Lambda \quad (10)$$

uz početni uvjet

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{I} \quad (11)$$

gdje je $\mathbf{P}(t)$ kvadratna matrica r -tog reda s elementima $p_{ij}(t)$, $\mathbf{P}'(t)$ je derivacija matrice $\mathbf{P}(t)$ i njezini su elementi derivacije $p'_{ij}(t)$ funkcija $p_{ij}(t)$, a Λ je također kvadratna matrica r -tog reda s elementima λ_{ij} i ona se zove *infinitesimalna matrica homogenog Markovljeva procesa*.

Možemo, dakle, pisati:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1r}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1}(t) & \cdots & p_{rr}(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{P}'(t) = \begin{bmatrix} p'_{11}(t) & \cdots & p'_{1r}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p'_{r1}(t) & \cdots & p'_{rr}(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{r1} & \cdots & \lambda_{rr} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Oznaka \mathbf{I} označuje jediničnu matricu r -tog reda.

Ako se vjerojatnosti $p_j(t)$, da se proces u trenutku $t \geq 0$ nađe u j – tom stanju, interpretiraju kao elementi jednodredne matrice (r -dimenzijskog vektora)

$\mathbf{p}(t) = [p_1(t), \dots, p_r(t)]$, onda se osnovna formula (3) može zapisati kao matrična jednadžba:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) \mathbf{P}(t), \quad t \geq 0 \quad (15)$$

Grubo govoreći, vjerojatnosti $\mathbf{p}(t)$ stanja procesa u trenutku $t \geq 0$ dobivaju se djelovanjem operatora $\mathbf{P}(t)$ na početne vjerojatnosti $\mathbf{p}(0)$ stanja promatranog procesa. Prema tome, proces promjene stanja tijekom vremena, primjerice proces dotrajavanja mosta, matematički je izražen operatorom $\mathbf{P}(t)$.

4.3 Primjer: sustav s tri stanja

Promotrimo proces dotrajavanja u kojemu se mogu razlučiti tri različita diskretna stanja sustava. Uvede se sljedeće pretpostavke:

1. Pretpostavimo 3 moguća stanja ($r = 3$):
 - 1 – ugroženo
 - 2 – napadnuto
 - 3 – oštećeno.

2. Pretpostavimo da su poznate veličine λ_1, λ_2 i λ_3 .
 Obrazloženje: istraživač ima određene empirijske podatke o ponašanju mostova i njihovih dijelova i na temelju toga procjenjuje očekivano vrijeme boravka u i-tom stanju $E[Z_i]$ ($i=1, 2, 3$).
3. S obzirom na fizikalnu (mehaničku) prirodu procesa dotrajavanja, pretpostavlja se da proces ne može prijeći u niže stanje, pa kada dospije u stanje 3 tu ostaje zauvijek ($\lambda_3 = 0$).
4. Pretpostavlja se da se stanje može mijenjati samo za jedan stupanj (nema skokova za 2 ili više).

Na temelju uvedenih pretpostavki infinitezimalna matrica poprima oblik:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Matrica prijelaznih vjerojatnosti $P(t)$ s obzirom na pretpostavke 3 i 4 ima oblik:

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ 0 & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Budući da derivacija matrice $P(t)$ po varijabli t glasi:

$$P'(t) = \begin{bmatrix} p'_{11}(t) & p'_{12}(t) & p'_{13}(t) \\ 0 & p'_{22}(t) & p'_{23}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

matrična diferencijalna jednadžba (15) u konkretnom slučaju izgleda ovako:

$$P'(t) = P(t) \Lambda \quad (19)$$

Primjenom pravila za množenje matrica i na temelju definicije jednakosti dviju matrica dobiva se sustav diferencijalnih jednadžbi za nepoznate funkcije $p_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Konkretno, u slučaju opisanom početnim pretpostavkama dobiva se:

$$p_{11}(t) = e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0 \quad (20)$$

$$p_{22}(t) = e^{-\lambda_2 t}, \quad t \geq 0 \quad (21)$$

$$p_{12}(t) = \begin{cases} \lambda_1 \left[\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \right], & \text{za } \lambda_2 \neq \lambda_1 \\ \lambda_1 t e^{-\lambda_1 t}, & \text{za } \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases} \quad (22)$$

$$p_{23}(t) = 1 - p_{22}(t), \quad t \geq 0 \quad (23)$$

$$p_{13}(t) = 1 - p_{11}(t) - p_{12}(t) \quad (24)$$

Uvrštavanjem u osnovnu formulu (3), vodeći računa o pretpostavci 3, mogu se proačunati vjerojatnosti $p_{ij}(t)$ (vjerojatnost da se proces u trenutku $t > 0$ nađe u stanju j). Tako za $j = 1$ imamo:

$$p_1(t) = p_1(0) \quad p_{11}(t) = p_1 \quad p_{11}(t) \quad (25)$$

$$p_2(t) = p_1(0) p_{12}(t) + p_2(0) p_{22}(t) \\ = p_1 p_{12}(t) + p_2 p_{22}(t) \quad (26)$$

$$p_3(t) = 1 - p_1(t) - p_2(t) \quad (27)$$

Osim vjerojatnosti pojedinih stanja, zanimljivo je promatrati i očekivano stanje dotrajalosti građevine u nekom trenutku t . Matematičko očekivanje stanja dotrajalosti za model s 3 stanja, 1, 2, i 3 može se zapisati kao:

$$E[S(t)] = 1 \cdot p_1(t) + 2 \cdot p_2(t) + 3 \cdot p_3(t) \quad (28)$$

Veličina $E[S(t)]$ redovito neće poprimati cjelobrojnu vrijednost, tako da se ona ne može shvatiti kao stupanj dotrajalosti, nego je treba tumačiti kao teorijsku prognozu srednjeg (prosječnog) stanja dotrajalosti građevine na koje se može primijeniti opisani matematički model.

5 Planiranje održavanja na primjeru Šibenskog mosta

5.1 Šibenski most

Na primjeru analize rezultata ispitivanja triju skupina elemenata Šibenskog mosta zorno će se pokazati razlika između zaključaka o provedbi sanacije temeljenih na probablističkoj i determinističkoj analizi (slika 4).



Slika 4. Šibenski most sagrađen 1966. godine

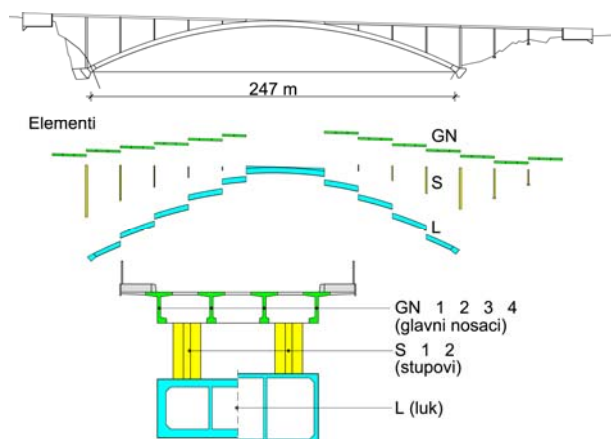
Šibenski je most jedan od najznačajnijih naših mostova jer sadrži armiranobetonski luk koji je prvi na svijetu u cijelosti izveden konzolnim postupkom, bez skele oslonjene o tlo [2]. Raspon luka sandučastog presjeka iznosi 246,4 m, dok je odnos strelice prema rasponu 1:8. Nadlučni je sklop od prednapetog betona roštiljna konstrukcija.

cija od 4 nosača u presjeku, koji su povezani poprečnim nosačima. Kolnička je ploča među gornjim pojasima nosača poprečno prednapeta. Armiranobetonski stupovi su osmerokutnog presjeka, a svako stupište sastoji se od po dva razmaknuta stupa. Nadlučni su stupovi povezani gredom koja je istodobno poprečni nosač kolničke konstrukcije [15]. Tijekom eksploatacije načinjeno je nekoliko pregleda mosta, koji su u većoj ili manjoj mjeri bili popraćeni ispitivanjima [16].

5.2 Parametri dotrajavanja

Analiza budućeg tijeka dotrajavanja provedena je za skupine konstrukcijskih elemenata mosta: glavne nosače, luk i stupove. Pomoću modela s tri stanja istražuje se pitanje prioriteta i optimalnog vremena provedbe eventualne sanacije. Pri razradi modela dotrajavanja načinjene su projekcije razvitka procesa na temelju podataka prikupljenih pregledima i ispitivanjima.

Statistička obrada zasnovana je na podjeli koja se rabi u periodičkim pregledima mostova (slika 5.).



Slika 5. Dispozicija Šibenskog mosta, podjela na glavne konstrukcijske elemente

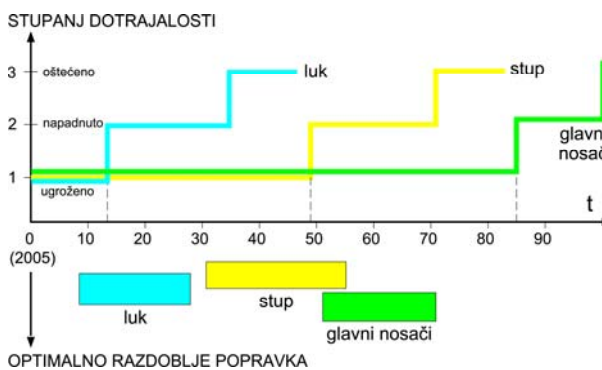
Pretpostavlja se da je glavni proces dotrajavanja ovog mosta vezan uz koroziju armature u betonu koja je potaknuta prodorom klorida iz okoliša. Proces se može podijeliti na tri stupnja dotrajivosti, odnosno stanja kroz koja pojedini elementi konstrukcije prolaze. Kao ulazni podaci uporabljeni su rezultati mjerenja sadržaja klorida u betonu [17]. Koeficijenti difuzije odabrani su prema

napucima danim u radu [18], dok su podaci o armaturi elemenata preuzeti iz [15].

Da bi se formirala trajektorija Markovljeva procesa, potrebno je proračunati ili pretpostaviti očekivana vremena boravka procesa u pojedinim stanjima, za što se rabe modeli poznati iz literature:

- 1) *Ugroženo*: razdoblje inicijacije korozije
Razdoblje uvođenja klorida u beton do kritične razine, odnosno do depasivizacije armature proračuna se poznatim modelom difuzije u anizotropnim, nehomogenim materijalima, koji je zasnovan na drugom Fickovu zakonu [19].
- 2) *Napadnuto*: razdoblje napredovanja korozije
Razdoblje od depasivizacije armature tijekom kojeg traje korozija do neke granične razine proračuna se prema često upotrebljavanom modelu koji uzima u obzir gustoću korozivne struje [19].
- 3) *Oštećeno*: teoretski trajno stanje u kojem je element oštećen korozijom više od razine koja je određena kao granična.

Početne vjerojatnosti stanja određene su na temelju zaključaka pregleda provedenog 2005. godine kada je ustanovljeno da je korozija već inicirana na oko 5 % površine svih promatranih elemenata. To znači da se čitav model za prognozu preostalog uporabnog vijeka postavlja od 2005. godine, dakle počevši od trenutka kada je most već star 39 godina. Informacija o povijesti dotrajavanja kroz to vrijeme sažeta je u parametre modela.



Slika 6. Trajektorije dotrajavanja elemenata Šibenskog mosta - model s tri stanja i optimalna razdoblja za poduzimanje popravaka na temelju probabilističke analize

Tablica 3. Parametri modela dotrajavanja

Stupanj dotrajavanja	Stupovi			Luk			Glavni nosači		
	p_i	$E[Z_i]$ (god)	λ_i	p_i	$E[Z_i]$ (god)	λ_i	p_i	$E[Z_i]$ (god)	λ_i
1 ugroženo	0,95	49	0,0204	0,95	13	0,0769	0,95	85	0,0117
2 napadnuto	0,05	22	0,0454	0,05	22	0,0454	0,05	15	0,0666
3 oštećeno	0	∞	1	0	∞	1	0	∞	1

Iz očekivanih vremena boravka procesa u pojedinom stanju dobiju se odgovarajući parametri dotrajavanja, prema formuli (10) (tablica 3.). Grafički prikaz parametara tvori trajektoriju dotrajavanja (slika 6.) koja predstavlja determinističku prognozu tijekom dotrajavanja.

5.3 Stohastička analiza

Uvrštavanjem parametara u formule proračunaju se vjerojatnosti da se proces u trenutku $t > 0$ nađe u stanju j tijekom razdoblja koje nas zanima. Rezultati proračuna grafički su prikazani na slikama 7.a, 7.b i 7.c.

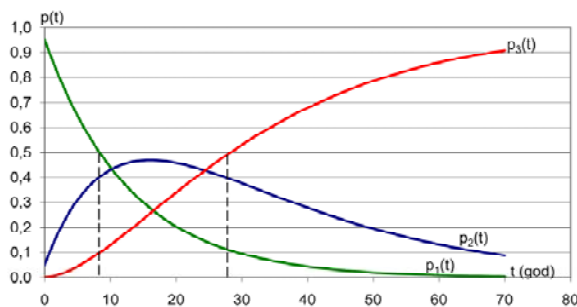
Analizirajmo pobliže prognozu dotrajavanja luka na slici 7.a. Vjerojatnost da se element luka nađe u stanju 1 "ugroženo" prevladava tijekom prvih 10 godina, potom idućih 14 godina (do isteka 24 godine od formiranja prognoze) najvjerojatnije stanje ostaje 2 "napadnuto", nakon čega najvjerojatnije stanje postaje 3 "oštećeno". Nakon 35 godina, u trenutku kada prema determinističkom modelu luk ulazi u stanje 3 "oštećeno", vjerojatnost da je element u graničnom (apsorbirajućem) stanju prema prikazanom probabilističkom modelu iznosi oko 60 %.

Postavljanjem određenog kriterija na predviđeno stanje elementa određuju se razdoblja tijekom kojih treba provesti popravke. Ovaj kriterij treba biti utemeljen na ekonomskim razmatranjima, odnosno optimalizaciji utroška za popravak tijekom idućih planskih razdoblja.

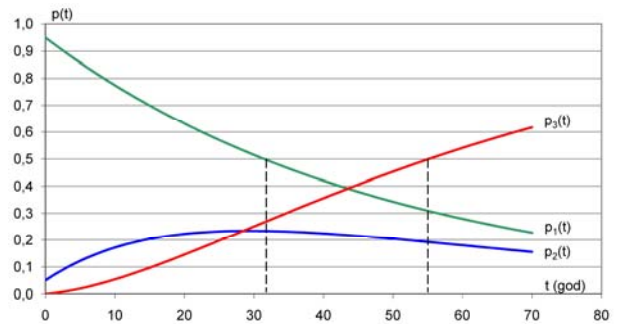
Neka je uspostavljen sljedeći kriterij za optimalno vrijeme popravka elemenata:

"Popravak elemenata započinje u trenutku kada vjerojatnost stanja 1 postane manja od 0,5, ($p_1(t) \leq 0,5$), a treba biti dovršen do trenutka kada vjerojatnost stanja 3 prijeđe vrijednost od 0,5 ($p_3(t) \geq 0,5$)."

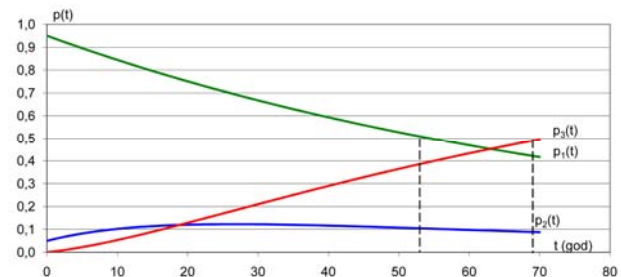
Crtkane oznake na grafikonima na slikama 7.a, 7.b i 7.c naznačuju granice razdoblja u kojima treba planirati radove. Ovakav kriterij povoljan je jer postavlja vremenske granice tijekom kojih se može planirati budžet za ispitivanje stanja, projektiranje sanacije, i napokon, popravak (slika 6.).



Slika 7.a Grafički prikaz vjerojatnosti stupnjeva dotrajalosti luka Šibenskog mosta

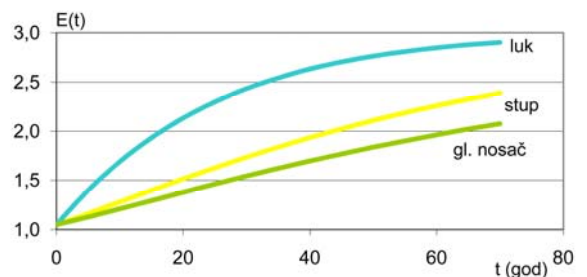


Slika 7.b Grafički prikaz vjerojatnosti stupnjeva dotrajalosti stupova Šibenskog mosta



Slika 7.c Grafički prikaz vjerojatnosti stupnjeva dotrajalosti glavnih nosača Šibenskog mosta

Dakle, usporedba rezultata modeliranja služi uspostavi dugoročne strategije održavanja mosta. Pri tome je još zanimljivo promotriti i grafičku usporedbu očekivanja stanja pojedinih elemenata (slika 8.).



Slika 8. Usporedba očekivanih vrijednosti stupnjeva dotrajalosti elemenata Šibenskog mosta

6 Zaključak

U sustavnom gospodarenju za svaki tip građevine bitno je odrediti glavni proces dotrajavanja, potom razdvojiti karakteristične faze procesa i napokon modelirati budući tijek procesa. Radi se o zahtjevnom zadatku koji podrazumijeva dublje poznavanje gradiva, konstrukcija, agensa i procesa koji utječu na stanje građevina ili pojedinih njihovih elemenata.

Tijekom relativno dugoga uporabnog vijeka dijelovi mostova prolaze kroz karakteristične faze dotrajavanja koje su, za neki dominantni proces, prepoznatljive i povezane s određenim postupcima popravaka.

U radu je opisan novi postupak za modeliranje dotrajanja koji je vrlo fleksibilan jer može kombinirati empirijske podatke s podacima dobivenim fizikalnim modeliranjem.

Modeliranje procesa služi za ocjenu preostalogo uporabnog vijeka i za prikaz mogućnosti provedbe popravaka uz grubu procjenu troškova. Model je kreiran da bude objektivno sredstvo komunikacije upravitelja nadležnog za budžetiranje i tehničkog osoblja nadležnog za održavanje.

Postupak za prognozu stanja prikazan u radu može se primijeniti na dvije razine:

1. Na razini mreže odnosno skupa svih mostova

Na razini cestovne uprave, odnosno cestovne mreže koja sadrži velik broj građevina prikuplja se mnoštvo podataka o početnim značajkama i o stanju mostova tijekom vremena na temelju kojih se planiraju radovi na održavanju. Rezultati svakog nalaza za pojedini element konstrukcije trebaju imati i global-

ni značaj za održavanje mostova na razini mreže, a to se može ostvariti primjenom modela ocjene globalnog stanja, odnosno stupnja dotrajalosti.

2. Na razini pojedine građevine ili njezinih karakterističnih dijelova

Postupak zasnovan na Markovljevim procesima može rezultirati probabilističkom procjenom budućeg stanja određene skupine elemenata koji dotrajavaju pretežno zbog jednoga glavnog uzroka. U tom slučaju elementi svake od skupina (npr. svi glavni nosači nadlučnoga rasponskog sklopa) čine statistički uzorak na kojem se obavljaju promatranja i prognoze budućih stanja.

Posredno, načela i model prikazan u radu mogu se primijeniti i na sljedeće:

- razradu sustava pregledavanja i ocjenjivanja
- ekonomska razmatranja u sklopu održavanja
- projektiranje trajnosti budućih mostova.

LITERATURA

- [1] Frangopol, D. M.; Kallen, M.-J.; van Noortwijk, J.M.: *Probabilistic models for life-cycle performance of deteriorating structures: review and future directions*. Progress in Structural Engineering and Material 2004. 6 (4), 197-212
- [2] Radic, J.; Savor, Z.; Puz, G.: *Extreme Wind and Salt Influence on Adriatic Bridges*. Structural Engineering International 13, 2003. (4), 242-245.
- [3] Radic, J.; Savor, Z.; Puz, G.; Bleiziffer J.; Balazic A.: Asset Management System for Croatian Motorways. Proc. Fib Symposium 2007: Concrete Structures – Stimulators of Development, Radic J. (ed.), SECON HDGK, Dubrovnik, 2007., 881-888.
- [4] Lounis, Z.; Vanier, D. J.: *Optimization of bridge maintenance management using Markovian models*, Proceedings of the International Conference on Short and Medium Span Bridges, 1998, Calgary, Alberta, pp.1045-1053
- [5] Bergmeister, K.: *Assessment procedures and safety evaluation of concrete bridges*, Safety Evaluation and Monitoring, Task Group 1.4, Non-Linear Analysis, Discussion Papers from the Working Party in Commission 1, CEB, Bulletin 239, May 1997.
- [6] Vassie, P.: *Bridge management, poglavlje iz Manual of bridge engineering*, Editors: Ryal, M. J.; Parke, G. A. R., Harding, J. E., T. Telford, 1999., pp 849-881
- [7] Hearn, G.: *Condition data and bridge management systems*, Structural Engineering International 3/98, Reports, 1998., 221-225
- [8] Hawk, H.; Small, E. P.: *The bridge management system*, Structural Engineering International, 4/1998, 309-314
- [9] Ukrainczyk, V.; Bjegović, D.: *Ispitivanje gradiva u sustavu osiguranja trajnosti betonskih konstrukcija*, Građevni godišnjak 1995., HDGI, Zagreb, 1995, str. 209 – 286
- [10] Bjegovic, D.; Radic, J.; Stipanovic, I.: *Development of service-life prediction models*, Proc. CONSEC'04, Concrete under Severe Conditions: Environment & Loading, B.H. Oh et al. (eds), Seoul, Korea, 2004., pp. 957-964
- [11] West, H. H.; McClure, R. M.; Gannon, E. J.; Riad, H. L.; Siverling, B. E.: *Nonlinear deterioration model for the estimation of bridge design life*, Research project No. 86-07, Final Report, The Pennsylvania Transportation Institute, 1989.
- [12] Pauše, Ž.: *Vjerojatnost, informacija, stohastički procesi*; Školska knjiga, Zagreb, 1974.
- [13] Banjad-Pečur, I.; Blumenschein, N.; Janeva, D.: *Armiranobetonski mostovi u maritimnoj okolini*, Zbornik radova simpozija Graditeljstvo i okoliš, Hrvatsko društvo građevinskih konstruktora, Brijuni 2002, str. 189-197
- [14] Puž, G.: *Analiza trajnosti postojećih armiranobetonskih lučnih mostova*, Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2005.
- [15] Šram, S.: *Gradnja mostova – betonski mostovi*, Golden marketing, Zagreb 2002.
- [16] Šimunić, Ž.; Radić, J.; Mekjavić, I.; Puž, G.; Pavlović, B.; Gukov, I.: *Glavni pregled i ispitivanja šibenskog mosta*, Zbornik radova IV kongresa DHGK, Društvo hrvatskih građevinskih konstruktora, Cavtat 1996., str. 147-154
- [17] Stipanović, I.: *Proračun uporabnog vijeka armiranobetonskih konstrukcija izloženih djelovanju klorida*, Magistarski rad, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2005., 244 str.
- [18] Ukrainczyk, V.; Halle, R.; Blumenschein, N.: *Trajnost armiranobetonskih konstrukcija izloženih kloridnoj koroziji*, Građevinar 50 (1998.) 10, 571-578
- [19] Andrade, C.; Alonso, C.; Gonzales, J. A.; Rodriguez, J.: *Remaining Service Life of Corroding Structures*, Proceedings of IABSE Symposium on Durability of Structures, IABSE, (1989) Lisbon (Portugal), 359.-364.