

Statička i dinamička analiza prostorne lančanice

Vanja Travaš, Ivica Kožar

Ključne riječi

prostorna lančanica,
ovješeni kabel,
viseći most,
ovješeni most,
matematički model,
lančani konačni element

Key words

spatial catenary,
suspended cable,
suspension bridge,
cable stay bridge,
mathematical model,
catenary-type finite
element

Mots clés

caténaire spatiale,
câble suspendu,
pont suspendu,
pont haubané,
modèle mathématique,
élément fini de type
caténaire

Ключевые слова

просторная цепь,
подвесной кабель,
висячий мост,
подвесной мост,
математическая
модель, цепной
конечный элемент

Schlüsselworte

räumliche Kettenlinie,
Schrägseilkabel,
Hängebrücke,
Schrägseilbrücke,
mathematisches Modell,
endliches Kettenelement

V. Travaš, I. Kožar

Izvorni znanstveni rad

Statička i dinamička analiza prostorne lančanice

Prikazana je statička i dinamička analiza ravninskih i prostornih visećih kabela. U praksi postoje konstrukcijski elementi mehaničko ponašanje kojih se može opisati idealiziranim matematičkim modelom ovješena elastičnog kabela. Primjer za to su vlačno opterećeni kabeli visećih i ovješanih mostova. Razumijevanje njihova ponašanja bitno je za analizu stabilnosti ovješanih konstrukcija. U radu je primijenjen sustav nelinearnih jednadžbi za određivanje inicijalnog oblika kabela.

V. Travaš, I. Kožar

Original scientific paper

Static and dynamic analysis of a spatial catenary

The static and dynamic analysis of spatial and in-plane suspended cables is presented. The mechanical behaviour of some structural elements can be described in practical terms by an idealized mathematical model of a suspended elastic cable element. This procedure can be applied on suspension bridges and cable stay bridges for cables subjected to tensile stress. The knowledge of behaviour of such cables is significant for analyzing stability of suspended structures. The nonlinear equation system is used to determine the initial shape of the cable.

V. Travaš, I. Kožar

Ouvrage scientifique original

L'analyse statique et dynamique de la caténaire spatiale

L'analyse statique et dynamique des câbles suspendus, tant plans que spatiaux, est présentée. Le comportement mécanique de quelques éléments structurels peut être décrit en de termes pratiques par le modèle mathématique idéalisé du câble élastique suspendu. Ce procédé peut être appliqué sur les ponts suspendus et les ponts haubanés pour câbles soumis à la charge de traction. L'information sur le comportement de ces câbles est importante pour l'analyse de stabilité des constructions suspendues. Le système des équations non-linéaires est utilisé pour déterminer la forme initiale du câble.

В. Траваш, И. Кошар

Оригинальная научная работа

Статический и динамический анализы просторной цепи

В работе показаны статический и динамический анализы равнинных и просторных висячих кабелей. В практике существуют конструкционные элементы, поведение которых можно описать идеализированной математической моделью подвесного упругого кабеля. Примером этого являются нагруженные на растяжение висячих и подвесных мостов. Понимание их поведения является важным для анализа устойчивости подвесных конструкций. В работе применена система нелинейных уравнений для определения начального облика кабеля.

V. Travaš, I. Kožar

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Statische und dynamische Analyse der räumlichen Kettenlinie

Dargestellt ist eine statische und dynamische Analyse ebener und räumlicher Hängekabel. In der Praxis bestehen Konstruktionselemente deren mechanisches Verhalten mit einem idealisierten mathematischen Modell des elastischen Hängekabels beschrieben werden kann. Ein Beispiel dafür sind zugbelastete Kabel von Hänge- und Schrägseilbrücken. Das Verstehen deren Verhaltens ist wesentlich für die Stabilitätsanalyse von Schrägseilkonstruktionen. Im Artikel wurde ein System unlinearer Gleichungen für die Bestimmung der initialen Kabelform angewendet.

Autori: **Vanja Travaš**, dipl. ing. građ.; prof. dr. sc. **Ivica Kožar**, dipl. ing. građ., Zavod za računalno modeliranje, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, V. C. Emina 5, Rijeka

1 Uvod

Potreba za proračunskim modelom prostorne lančanice dolazi do izražaja prilikom proračuna ovješene konstrukcije visećih mostova. Za takav tip konstrukcija potrebno je predvidjeti statičko i dinamičko ponašanje kabela za različite slučajeve opterećenja.

Zajedničko djelovanje čvrste konstrukcije i užeta važno je poradi međudjelovanja konstrukcije i kabela. Kabel, koji je nelinearna tvorevina, ako povezuje dvije točke unutar konstrukcije (npr. gredu i pylon) ponašanje cijelog sklopa čini nelinearnim. U tim uvjetima dinamičko ponašanje konstrukcije postaje nelinearno (primjerice vlastita frekvencija postaje ovisna o amplitudi oscilacija) i za određene početne uvjete moguće su i kaotične oscilacije [7]. Zbog velike složenosti navedenih pojava ograničit ćemo se na analizu lančanice kao samostalne konstrukcije.

Pri proračunu ovješene mostova posebno je važna modalna analiza kabela. Naime, ako se vlastita frekvencija kabela podudara s vlastitom frekvencijom kolničke konstrukcije mosta, može doći do pojave rezonancije. Vjerojatnost pojave rezonancije ovisi o mnoštvu parametara, u prvom redu o odnosu (gustoće) deformacijske energije rasponske konstrukcije i deformacijske energije kabela, o prigušenju, o mjestu pričvršćenja kabela i dr., te se ovdje neće razmatrati.

Ovješeni kabeli pripadaju konstrukcijskim elementima u kojima je jedna prostorna dimenzija (dužina kabela) znatno veća od preostalih dviju (širina i visina poprečnog presjeka). Iz tog razloga, unutar inženjerske nomenklature opravdano ih je svrstati u grupu fleksibilnih konstrukcijskih elemenata.

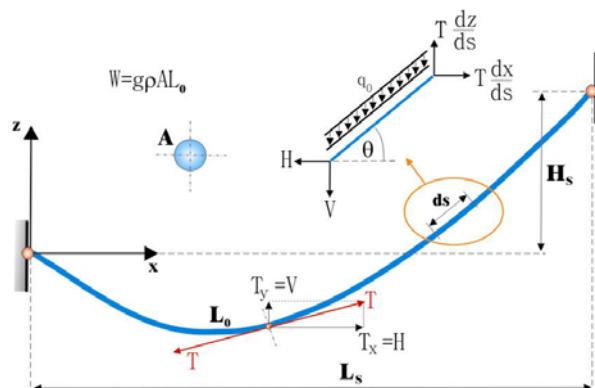
Zbog izuzetno male fleksijske krutosti, pretpostavljamo da kabeli ne mogu preuzeti momente savijanja. Osim male fleksijske krutosti, kabeli se odlikuju i svojstvom male poprečne krutosti koja im ne omogućava preuzimanje poprečnih sila. Dakle, ovješeni kabeli preuzimaju samo uzdužne sile, i to pozitivnog predznaka (vlačne sile). Uobičajeno je kabele prikazati modelom lančanice opterećene vlastitom težinom. Uvođenjem modela lančanice moguće je razviti unificiranu teorijsku podlogu za statičku i dinamičku analizu kabela različitih fizikalnih i geometrijskih karakteristika. Stoga ćemo u nastavku rada prikazati proračunski model ravninske i prostorne lančanice.

2 Statička analiza lančanice u ravnini

Kod većine konstrukcijskih elemenata ravnotežna je konfiguracija uglavnom unaprijed poznata (a time i početna geometrijska forma). U slučaju lančanica ta pretpostavka nije zadovoljena. U stručnoj se literaturi problem

određivanja početnog položaja slobodno ovješene lančanice naziva problemom početne ravnoteže (*initial equilibrium problem*).

Ako nema vanjskih opterećenja, lančanica je opterećena samo vlastitom težinom. Razlike u visinama njezinih ležajeva definiraju nesimetričan oblik ravnotežnog stanja koji je unaprijed nepoznat (slika 1.). Pri uspostavljanju ravnoteže, elastična se lančanica rasteže pod djelovanjem vlačnih sila (sila T) smjer kojih je u svakoj točki definiran tangentom.



Slika 1. Diferencijalni element lančanice

Diferencijalnu jednadžbu ravnoteže elastičnih lančanica izveli su *Jacob* i *Johann Bernoulli* [1]. Iznalaženje jednadžbe počinje promatranjem ravnotežnog stanja diferencijalnog elementa lančanice ds [2]. Ukupna horizontalna (1) i vertikalna sila (2) može se dovesti u vezu s vlačnom silom T u svakoj točki lančanice [1].

Za lančanicu opterećenu samo vlastitom težinom horizontalna komponenta vlačne sile poprima konstantnu vrijednost (1), a vertikalna komponenta sile (2) ovisi o nagibu tangente (slika 1.).

$$T \frac{dx}{ds} = H \quad ; \quad H = const. \tag{1}$$

$$T \frac{dz}{ds} = q_0 \Delta s - V \quad ; \quad V = H \cdot tg \theta \tag{2}$$

Budući da je prema pretpostavci lančanica podložna Hookeovu zakonu elastičnih deformacija, moguće je vlačnu tangencijalnu silu u svakoj točki lančanice dovesti u vezu s pomakom te iste točke (3). Veza je uspostavljena s članom osne krutosti AE koji je ujedno i najvažniji podatak mehaničkih karakteristika elastičnih lančanica.

$$T = AE \left(\frac{ds}{ds_0} - 1 \right) \tag{3}$$

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 \tag{4}$$

Zbog djelovanja vlačnih sila, diferencijalni se element lančanice rasteže. Tokom deformiranja masa lančanice mora biti očuvana [1], pa se za diferencijalni segment ds može napisati sljedeći geometrijski uvjet (4).

Nakon kvadriranja jednačba (1) i (2) moguće ih je uvrstiti u jednačbu (4) čime se dobiva izraz koji određuje intenzitet vlačne sile (5) ovisno o njezinoj horizontalnoj i vertikalnoj komponenti [1].

$$T(s) = \left[H^2 + (q_0 s - V)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{ds_0} ; \quad \frac{dz}{ds_0} = \frac{dz}{ds} \frac{ds}{ds_0} \quad (6)$$

Uzimajući u obzir sljedeće diferencijalne odnose (6)

i koristeći se jednačbama (1), (2) i (4), u kojima se ti odnosi spominju, moguće je dobiti rješenje problema početne konfiguracije elastične lančanice (geometrijski oblik) u obliku parametarske funkcije (7,8). Funkcijski je parametar s generalizirana Lagrangeova koordinata [2].

$$z(s) = \frac{W \cdot s}{E \cdot A} \cdot \left(\frac{V}{W} - \frac{s}{2L_0} \right) + \frac{H \cdot L_0}{W} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V - \frac{s}{L_0}}{H} \right)^2} \right] \quad (7)$$

$$x(s) = \frac{H \cdot s}{E \cdot A} + \frac{H \cdot L_0}{W} \cdot \left(ch \left(\frac{V}{H} \right) - sh \left(\frac{V - W \frac{s}{L_0}}{H} \right) \right) \quad (8)$$

A - ploština poprečnog presjeka

E - modul elastičnosti

L_0 - početna duljina lančanice

W - težina lančanice

s - Lagrangeova koordinata

H - horizontalna komponenta vlačne sile

V - vertikalna komponenta vlačne sile

Novost u radu jest određivanje početnoga ravnotežnog oblika lančanice (formulacija ne konvergira iz proizvoljnoga geometrijskog položaja kabela). Prikladnom matematičkom transformacijom [2] može se problem formulirati tako da su horizontalna i vertikalna komponenta maksimalne tangencijalne sile nepoznanice nelinearnog sustava jednačbi (9,10).

$$F(H, V) = \frac{H L_0}{E A} + \frac{H}{W} \left(sh \left(\frac{V}{H} \right) - sh \left(\frac{V - W}{h} \right) \right) - L_s \quad (9)$$

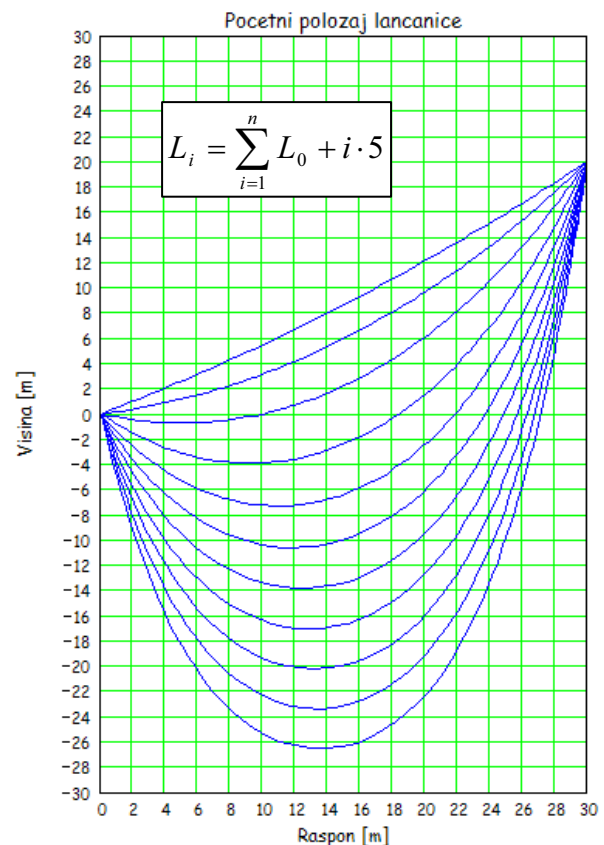
$$G(H, V) = \frac{W_0}{E \cdot A} \cdot \left(\frac{V}{W} - \frac{1}{2} \right) + \frac{H \cdot L_0}{W} \left[\sqrt{A + \left(\frac{V}{H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V - W}{H} \right)^2} \right] - H_s \quad (10)$$

H_s - visinska razlika ležajeva lančanice

L_s - raspon ležajeva lančanice

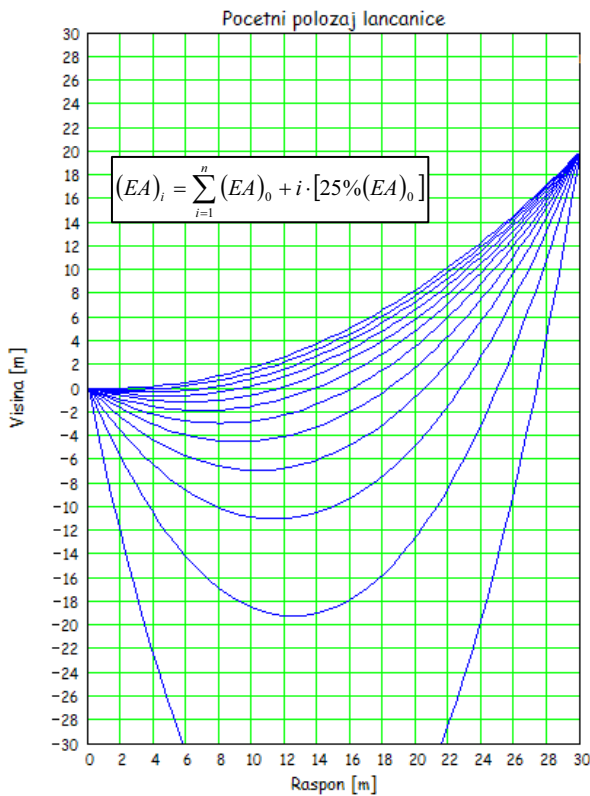
Sustav jednačbi (9,10) rješava se numeričkim putem koristeći se Newtonovim iterativnim postupkom [6].

Slika 2. prikazuje početni oblik lančanice za nekoliko različitih polaznih vrijednosti njezine početne duljine L_0 . Ostali parametri definirani su sljedećim veličinama: $E = 8,25E + 5$ kN/m², $A = 0,071$ m², $\rho = 450$ kg/m, $h = 20,0$ m, $l = 20$ m, $L_0 = 25$ m.



Slika 2. Ravnotežne konfiguracije lančanice za različitu početnu duljinu

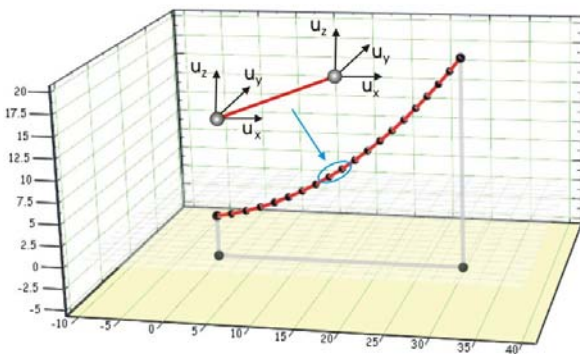
Za beskonačnu osnu krutost ($EA = \infty$) problem se reducira na jednu nelinearnu jednačbu. Slika 3. prikazuje ravnotežni oblik lančanice za različite osne krutosti.



Slika 3. Ravnotežne konfiguracije lančaniće za različitu osnu krutost

3 Statička analiza lančaniće u prostoru

Radi potrebe za opisivanjem različitih vrsta opterećenja, nužan je diskretni model kontinuirane lančaniće. Diskretna analiza podrazumijeva proračun veličine pomaka u prethodno definiranim točkama. Kako bi se taj postupak proveo, odabrana je numerička metoda konačnih elemenata (lančanih elemenata) kojom se lančanića diskretizira na sustav s konačnim brojem stupnjeva slobode (slika 3.). Diskretizacija se provodi za geometrijski oblik dobiven u prijašnjem poglavlju (referentna ravnotežna konfiguracija leži u ravni xz) a rabe se specijalni konačni elementi [1] konstruirani za analizu lančanića (lančani konačni elementi).



Slika 4. Diskretizacija lančaniće metodom konačnih elemenata (lančani konačni elementi)

Lančani konačni element ima dva čvora te ima sa šest stupnjeva slobode [1]. Na taj je način svakom čvoru omogućen prostorni pomak (u) s odgovarajućim u_x , u_y i u_z komponentama. Za takav konačni element, vektor vanjskog opterećenja (11) i vektor čvornih pomaka (12) primaju sljedeći oblik.

$$\mathbf{F} = \{F_x^1 \quad F_y^1 \quad F_z^1 \quad F_x^2 \quad F_y^2 \quad F_z^2\}^T \quad (11)$$

$$\mathbf{u} = \{u_x^1 \quad u_y^1 \quad u_z^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad u_z^2\}^T \quad (12)$$

Lančaniće su konstrukcijski elementi okarakterizirani velikom fleksibilnošću koja nameće nezaobilaznu uporabu geometrijski nelinearnih članova pri uspostavljanju veze između pomaka i deformacija. Na taj način konačnu matricu krutosti (tangenta matrica) definiramo zbrojem materijalne \mathbf{K}_m i geometrijske \mathbf{K}_g matrice krutosti (13).

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{K}_T = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g \quad (13)$$

Formulaciju tangente matrice krutosti elastičnog lančanoga elementa izveo je O'Brien [4], [5]. Kako je vlačnu silu moguće izračunati poznavajući njezinu horizontalnu komponentu ($H = const.$) te kut između tangente u točki za koju računamo silu i osi x (θ), tangenta matrica krutosti izražena je u funkciji horizontalne sile H i kutova θ_1 i θ_2 . Proračun tangente krutosti počinje izračunavanjem koeficijenata μ (14), β (15) i α (16) lančanoga konačnog elementa [1].

$$\mu = \frac{q_0}{2} \left[\frac{L_x}{H} - \frac{L}{EA} \right] \quad (14)$$

$$\beta = 4 \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \left[\mu \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \right] \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{q_0}{\beta + \frac{q_0^2 L_0 L_x}{EH}} \quad (16)$$

Obratimo pozornost da su kutovi θ_1 i θ_2 jednaki kutu θ ako se između čvorova lančanoga elementa pretpostavi linearni segment lančaniće [3]. Dakle, moguće je i povećati točnost proračuna tako da se između čvorova elementa lančani element prikaže krivuljom drugoga reda. U tom se slučaju kutovi tangente mijenjaju po duljini elementa (θ_1 je kut na prvom, θ_2 na drugom čvoru). Lokalna matrica krutosti je simetrična [1]. Uobičajeno ju je prikazati matricnom formom (17).

$$\mathbf{K}_{sub} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{q_0}{EA} + \sin \theta_2 - \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \\ 0 & \frac{H}{\alpha L_x} & 0 \\ \cos \theta_1 - \cos \theta_2 & 0 & \frac{q_0}{H} - \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

U jednačbama (14), (15) i (16) q_0 predstavlja ukupno vertikalno kontinuirano opterećenje na jedan konačni element (18). Takvim opterećenjem modelira se utjecaj vlastite težine lančanice. U istim jednačbama L_x označuje duljinu projekcije konačnog elementa na os x .

$$q_0 = \frac{-9.81 \rho L_0}{\text{broj konacnih elemenata}} \quad (18)$$

Napomenimo da je pri generiranju globalne matrice krutosti potrebno lokalnu krutost transformirati uporabom uobičajene transformacijske matrice definirane položajem konačnog elementa (19).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Konačna lokalna matrica krutosti generira se uvrštavanjem submatrične komponente kako je prikazano u jednačbi (20).

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{sub} & -\mathbf{K}_{sub} \\ -\mathbf{K}_{sub} & \mathbf{K}_{sub} \end{bmatrix} \mathbf{T} \quad (20)$$

Globalna matrica krutosti proračunava se zbrojem svih lokalnih matrica krutosti napisanih za globalne stupnjeve slobode (21).

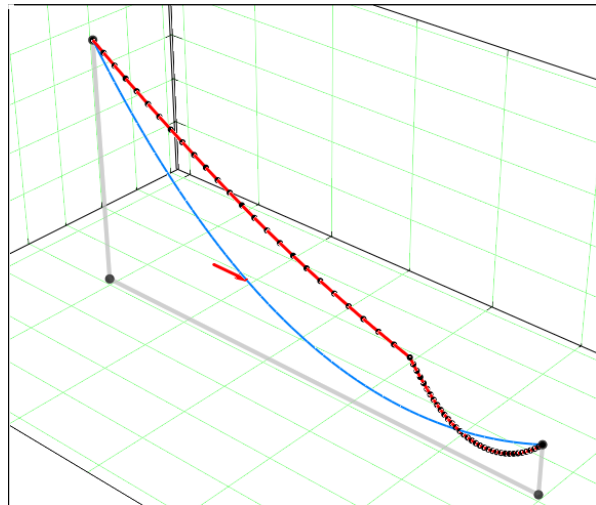
$$\mathbf{K} = \sum_{el=1}^{\text{broj elemenata}} \mathbf{K}_T^{el}{}_{lok \rightarrow glo} \quad (21)$$

Rubni su uvjeti definirani na krajnjim čvorovima tako da im se onemogućuje pomak u sva tri ortogonalna smjera. Adekvatnom formulacijom rubnih uvjeta, diskretizacijski oblik jednačbe ravnoteže nudi mogućnost opisivanja različitih tipova oslanjanja lančanice.

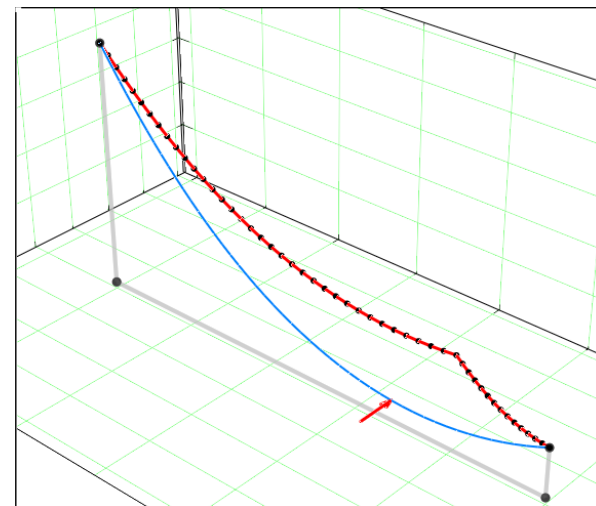
Nakon uključivanja rubnih uvjeta tako da se globalna matrica krutosti reducira, moguće je riješiti sustav jednačbi te dobiti vrijednosti pomaka čvorova konačnih elemenata (22).

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F} \quad (22)$$

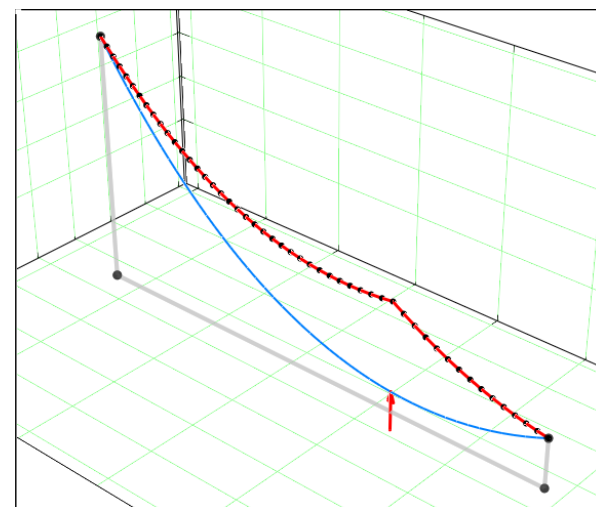
Na sljedećem primjeru prikazana je lančanica opterećena koncentriranom silom (slike 5., 6. i 7.).



Slika 5. Pomaci lančanice uzrokovani koncentriranom silom paralelnom sa osi x koordinatnog sustava



Slika 6. Pomaci lančanice uzrokovani koncentriranom silom paralelnom sa osi y koordinatnog sustava



Slika 7. Pomaci lančanice uzrokovani koncentriranom silom paralelnom sa osi z koordinatnog sustava

Treba obratiti pozornost da je tangentna matrica krutosti ovisna samo o horizontalnoj komponenti tangencijalne sile u lančanići [1]. Nakon konstruiranja diskretizacijske jednadžbe ravnoteže (za konačan broj stupnjeva slobode) moguće je izvršiti dinamičku analizu lančaniće (modalnu analizu).

4 Dinamička analiza lančaniće u prostoru

Pri proračunu vlastitih frekvencija osciliranja i pripadajućih oblika osciliranja, desna strana ravnotežne dinamičke jednadžbe poprima vrijednost *mul*-vektora (23).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_T \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (23)$$

Grupirajući amplitude pomaka u vektor **d** (vektor svojstvenih vrijednosti) te usvajajući harmonijski odziv konstrukcije (24), (25)

$$\mathbf{u} = \mathbf{d} \sin \omega t \quad (24)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{d} \cos \omega t \quad (25)$$

dobiva se generalizirani problem svojstvenih vrijednosti (26)

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_T) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (26)$$

Dinamičku matricu **D** proračunavamo množeći jednadžbu (26) s invertiranom matricom krutosti (27)

$$(-\omega^2 \underbrace{\mathbf{M} \mathbf{K}_T^{-1}}_{\mathbf{D}} + \mathbf{I}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (27)$$

Dijeljenjem jednadžbe (27) s veličinom $-\omega^2$, u kojoj ω predstavlja frekvenciju osciliranja, dobiva se klasičan oblik problema svojstvenih vrijednosti (28)

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad ; \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (28)$$

Za lančani konačni element moguće je matricu masa prikazati kao pozitivno definiranu dijagonalnu matricu ovisnu o geometrijskim karakteristikama elemenata te gustoći ρ materijala lančaniće (29).

$$\mathbf{M}_{lok} = \frac{\rho A L}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Konzistentna matrica masa zamijenila se dijagonalnom matricom masa tako da se svakom čvoru predala polovica ukupne mase elementa (29).

Globalna matrica masa (30) dobiva se zbrojem svih lokalnih matrica masa napisanih za globalne stupnjeve slobode.

$$\mathbf{M} = \sum_{el=1}^{broj\ elemenata} \mathbf{M}^{el}_{lok \rightarrow glo} \quad (30)$$

Globalnu matricu masa treba reducirati u skladu s rubnim uvjetima.

Nakon uključivanja rubnih uvjeta u jednadžbu (27) moguća je inverzija matrice krutosti te proračun dinamičke matrice **D**.

Vlastita frekvencija ω_i za pojedini oblik osciliranja proračuna se s pomoću komponenta \mathbf{d}_i normaliziranoga vlastitog vektora **d** problema svojstvenih vrijednosti (31)

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{d}_i}} \quad (31)$$

Oblici osciliranja definirani su koordinatama čvorova dobivenim kao vlastiti vektor dinamičke matrice **D** proračunati za pojedinu vlastitu frekvenciju osciliranja ω_i .

Ako lančanića (ovješeni kabel) ima neprimjerene vrijednosti vlastitih frekvencija, u inženjerskoj se praksi rabe prigušivači osciliranja. U određenom slučaju prigušivačem se može smatrati i koncentrirana masa na karakterističnom mjestu lančaniće; u okviru metode konačnih elemenata, takav je prigušivač moguće modelirati povećavajući mase konačnih elemenata na kojima se oni nalaze.

Uobičajeni postupak kontrole vlastitih frekvencija lančaniće jest ugradnja viskoznih prigušivača. Za provedbu takve analize potrebno je jednadžbu (23) nadopuniti članom viskoznog prigušenja (32)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_T \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (32)$$

Uobičajeno je matricu viskoznog prigušenja definirati linearnom kombinacijom matrice krutosti **K** (21) i matrice masa **M** (30).

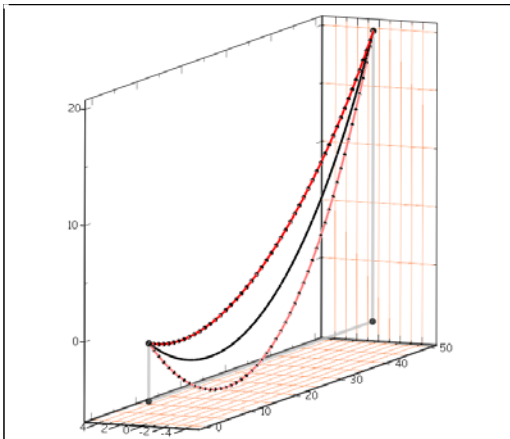
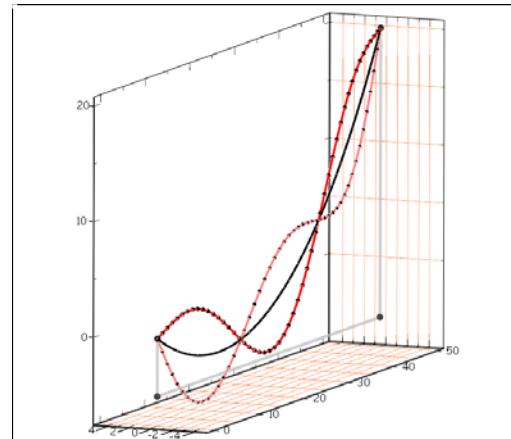
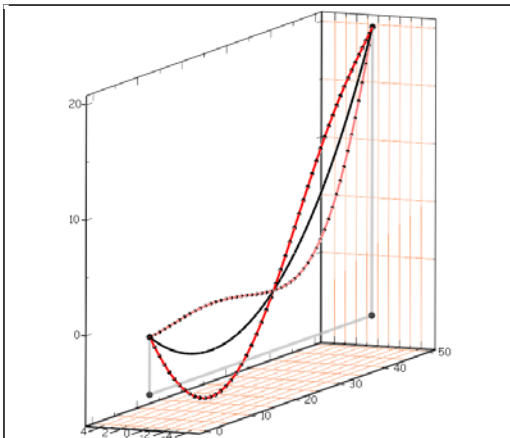
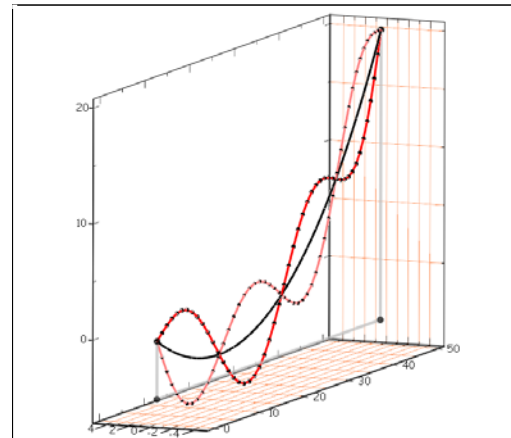
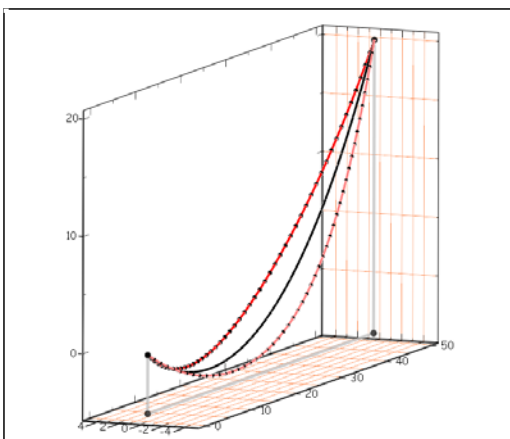
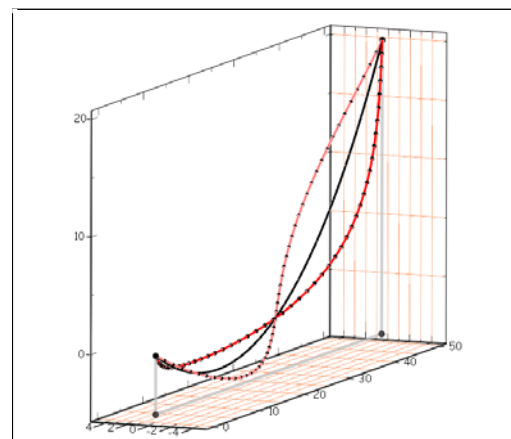
$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (33)$$

Parametri α i β određuju se eksperimentalno, a moguće ih je pronaći i u literaturi.

Treba napomenuti da u slučaju uvođenja prigušenja u analizu problem svojstvenih vrijednosti nije definiran (32) i vlastite frekvencije i oblike nije moguće odrediti.

5 Primjeri

Prikazat ćemo usporedbu rezultata dobivenih 3D modalnom analizom lančaniće. Na slikama od 8. do 13. prikazano je nekoliko oblika osciliranja dobivenih 3D analizom prema prikazanom algoritmu.

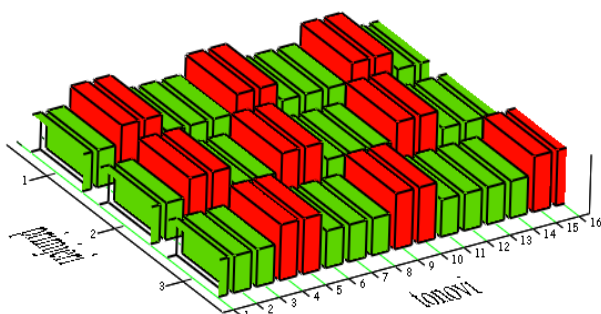
Slika 8. 3D modalna analiza (1. oblik, isti kao u 2D, $f = 0,06$ Hz)Slika 11. 3D modalna analiza (5. oblik, isti kao u 2D, $f = 0,18$ Hz)Slika 9. 3D modalna analiza (2. oblik, isti kao u 2D, $f = 0,12$ Hz)Slika 12. 3D modalna analiza (6. oblik, isti kao u 2D, $f = 0,24$ Hz)Slika 10. 3D modalna analiza (3. i 4. oblik, ne postoje u 2D, $f = 0,17$ Hz)Slika 13. 3D modalna analiza (8. i 9. oblik, ne postoje u 2D, $f = 0,33$ Hz)

Vidi se da su neki oblici u potpunosti unutar ravnine **XZ**, odnosno odgovaraju dvodimenzijском načinu analize. Neki oblici imaju i treću komponentu u vlastitom obliku oscilacije i oni se dobivaju isključivo trodimenzijском analizom.

Slika 14. prikazuje udio dvodimenzijских vlastitih oblika u prvih 16 tonova trodimenzijске analize za navedeni primjer s geometrijskim i mehaničkim karakteristikama kao u tablici 1.

Tablica 1. Parametri lančanice za primjer modalne analize

Modul elastičnosti	8,25 E+5 KN/M ²
površina poprečnog presjeka	0,01 m ²
gustoća	450 kg/m
raspon lančanice	50 m
visina lančanice	20 m
početna duljina lančanice	50 m
broj konačnih elementa	50



Slika 14. Udio rezultata 2D analize (niži zeleni stupci) u rezultatima 3D analize (viši crveni stupci) u prvih 16 oblika

Ne može se unaprijed reći koji će biti položaj frekvencija iz 2D analize jer to ovisi o više parametara (u prvom redu o napetosti kabela, što ovisi o geometriji i krutosti). No, na temelju više proračunatih primjera može se reći da je udio oblika 3D analize uvijek relativno značajan za kabelske konstrukcije (oblici koji se pojavljuju samo u 3D analizi redovito su unutar prvih nekoliko oblika). Na slici 14. vidimo udio 2D oblika (niži, zeleni stupci) i 3D oblika (viši, crveni stupci) u prvih 16 oblika za tri različite napetosti kabela. Prvi je slučaj za kabel prema tablici 1. (početna duljina užeta 50 m), drugi slučaj je za

opušteniji kabel (svi podaci isti, samo je početna duljina užeta 55 m), a treći slučaj opisuje napetiji kabel (svi podaci isti, samo je početna duljina užeta 42 m). Vidimo da s porastom naprežanja u kabelu vrlo blago raste udio 2D oblika unutar prvih 16 oblika (i obratno).

U tablici 2. prikazane su uzdužne sile i prve tri vlastite frekvencije, kao i pripadajući oblici za navedena 3 primjera.

Tablica 2. Frekvencije osciliranja za različite napetosti kabela

Oblik	Primjer		
	1. L ₀ = 50 m H = 1206 kN	2. L ₀ = 55 m H = 922 kN	3. L ₀ = 42 m H = 2298 kN
1.	0,061 Hz oblik kao sl.8	0,056 Hz oblik kao sl.8	0,073 Hz oblik kao sl.8
2.	0,122 Hz oblik kao sl.9	0,111 Hz oblik kao sl.9	0,146 Hz oblik kao sl.9
3.	0,168 Hz oblik kao sl.10	0,142 Hz oblik kao sl.10	0,218 Hz oblik kao sl.11

6 Zaključak

Za ispravnu modalnu analizu ovješnih kabela preporučljivo je raspolagati s 3D numeričkim modelom. Unutar ovoga rada prikazana je kvantitativna analiza kabela te pogreška koja nastaje zbog odabira 2D analize kabela (umjesto 3D) uzrokovane neadekvatnim kvalitativnim pristupom. Novost je u formulaciji kabelskih elemenata formuliranje nelinearnog sustava jednadžbi za određivanje početnoga stabilnog oblika kabela.

Prikazani rezultati dobiveni su izradom numeričkog modela u programskom paketu *MathCAD 11*.

LITERATURA

- [1] Tibert, G.: *Numerical Analyses of Cable Roof Structures*, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1999.
- [2] Irvine, M.: *Cable Structures*, MIT Press 1981, Dover Publications Inc., reprint 1992.
- [3] Jayaraman, H. B.; Knudson, W. C.: *A curved element for the analysis of cable structures*, Computers & Structures Vol. 14, No. 3/4 (1981.), pp. 325.-333.
- [4] O'Brien, W. T.: *General solution of suspended cable problems*. Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 93, No. ST1 (February 1967), pp. 1.-26.
- [5] O'Brien, W. T.; Francis, A. J.: *Cable movements under two-dimensional loads*. Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 90, No. ST3 (June 1964.), pp. 89.-123.
- [6] Kožar, I.: *Sistemi nelinearnih jednadžbi, s listingom programa*, FRaK, No.7, 1983., str.36.-39.
- [7] Kapitaniak T.: *Chaos for Engineers, Theory, Applications and Control*. Springer, Berlin 2000.