UDK 624.042.001.4 Primljeno 24. 4. 2001.

Otkrivanje oštećenja konstrukcija mjerenjem dinamičkih karakteristika

Mladenko Rak, Nina Bjelajac

Ključne riječi

oštećenja, dinamičke karakteristike, frekvencije, krutost, masa, prigušenje, mjerenje

M. Rak, N. Bjelajac *Izvorni znanstveni rad*

Otkrivanje oštećenja konstrukcija mjerenjem dinamičkih karakteristika

U ovom članku su opisana tri pristupa u analizi oštećenja na konstrukcijama s pomoću izmjerenih modalnih karakteristika. Prikazana je veza između promjene strukturnih karakteristika konstrukcije (krutost i masa) i modalnih karakteristika koji sadrže vlastite frekvencije i vlastite vektore. Napravljeni su posebni kompjutorski programi DT1 i DT2 s pomoću kojih se na temelju izmjerenih vlastitih frekvencija prije i nakon oštećenja određuju mjesta i veličine oštećenja dotične konstrukcije.

Key words

damage, dynamic characteristics, frequencies, rigidity, mass, damping, measurement

M. Rak, N. Bjelajac *Original scientific paper*

Detecting structural damage through dynamic characteristic measurement

Three approaches to the analysis of structural damage, based on measurement of modal characteristics, are presented in the paper. The relationship between the change of structural parameters (rigidity and mass) and modal characteristics containing the structure's frequencies and vectors, is presented. Special computer programs, DT1 and DT2, were developed to enable determination of the location and extent of structural damage based on measurement of the structure's frequencies prior to and after the damage.

Mots clés

détériorations, caractéristiques dynamiques, fréquences, rigidité, masse, atténuation, mesure

M. Rak, N. Bjelajac *Ouvrage scientifique original*

Détection des détériorations des constructions par la mesure des caractéristiques dynamiques

L'article décrit trois approches de l'analyse des détériorations des constructions à l'aide des caractéristiques modales mesurées. On décrit le lien entre le changement des caractéristiques structurales de la construction (rigidité et masse) et les caractéristiques modales qui comprennent leurs propres fréquences et vecteurs. Des logiciels spécifiques DT1 et DT2 ont été mis au point qui permettent la localisation et l'étendue des détériorations d'une construction en fonction des fréquences propres mesurées avant et après l'endommagement.

Ключевые слова:

повреждения, динамические характеристики, частоты, жёсткостmf, масса, приглушение

М. Рак, Н. Белаяц *Оригинальная научная работа*

Открытие повреждений конструкций измерением динамических характеристик

В этой статье описаны три подхода в анализе повреждений на конструкциях с помощью измеренных модальных характеристик. Показатта связь между изменением структурных характеристик конструкции (жёсткость и масса) *и модальных характеристик, собственные частоты и собственные векторы. Выработаны специальные компх)тергiые программы DT7 и DT2 с помощью которых на остiовании измеренных собстенных цастог до и после повреждения определяются места н величины повреждения дангiой конструкции.*

Schlüsselworte:

Beschädigung, dynamische Kennzeichen, Frequenzen, Steifigkeit, Masse, Dämpfung, Messung

M. Rak, N. Bjelajac *Wissenschaftlicher Originalbeitrag*

Entdeckung von Konstruktionsbeschädigungen durch Messung der dynamischen Kennzeichen

In diesem Artikel sind drei Zutritte zur Analyse der Beschädigungen an Konstruktionen mit Hilfe von gemessenen Modalkennzeichen beschrieben. Dargestellt ist die Beziehung zwischen der Änderung der Strukturkennzeichen der Konstruktion (Steifigkeit und Masse) und der Modalkennzeichen die die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren enthalten. Es wurden besonders Komputerprogramme DT1 und DT2 ausgearbeitet mit deren Hilfe man auf Grund der gemessenen Eigenfrequenzen vor und nach der Beschädigung die Stellen und Grössen der Beschädigung der Konstruktion bestimmt.

Autor: Doc. dr. sc. **Mladenko Rak,** dipl. ing. građ.; dr. sc. **Nina Bjelajac**, dipl. ing. građ.; Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, Zagreb

1 Uvod

Dinamičke karakteristike (vlastiti vektori, vlastite frekvencije i prigušenja) građevinskih i ostalih vrsta konstrukcija vrlo su važni čimbenici u analizi ponašanja konstrukcija pod dinamičkim opterećenjem. Tijekom posljednjeg desetljeća, paralelno s brzim razvojem mjerne tehnike, sve se više nameće potreba eksperimentalnog određivanja relevantnih dinamičkih karakteristika. Posebno se to odnosi na vrlo složene konstrukcije s nelinearnim ponašanjem. Poznato je da se permanentnim praćenjem stanja dinamičkih karakteristika dobiva dobra informacija o trenutnom stanju konstrukcije u eksploataciji. Moguće je naime na temelju razlike stanja dinamičkih karakteristika između dvaju razdoblja odrediti promjene krutosti konstrukcije odnosno ocijeniti eventualna oštećenja koja su u međuvremenu nastala.

Osim eksperimentalnog praćenja dinamičkog ponašanja realnih konstrukcija, odnosno prototipova, vrlo se često u smislu bazičnih istraživanja rade modelska ispitivanja, a onda na bazi teorije o sličnosti ili tzv. modelske analize rade zaključci za prototipove konstrukcija. Prednost ovih istraživanja jest u tome što se u laboratoriju mogu stvoriti bitno bolji uvjeti za izvođenje pokusa, angažirati bolja oprema, a kao najvažnije, i veliki broj uzoraka koji omogućavaju kvalitetnije zaključke.

Otkrivanje mjesta i veličine oštećenja u inženjerskim konstrukcijama veoma je važno u praćenju trajnosti konstrukcija tijekom eksploatacije. Jedna od istaknutih metoda u području bezrazornih ispitivanja jest mjerenje vlastitih frekvencija. Prednost je ove metode u tome što se do podataka o vlastitim frekvencijama može doći mjerenjem dinamičkog odgovora u samo jednoj točki konstrukcije. Važnost izmjerenih frekvencija sustava jest u tome što je njihova promjena usko povezana s promjenom ključnih fizikalnih karakteristika sustava kao što su krutost, masa i prigušenje. Kod građevinskih konstrukcija promjena vlastitih frekvencija i vlastitih vektora pojavljuje kao posljedica pojave pukotina ili korozije gradiva.

Baruch 1978. i 1982. te Lapierre i Ostiguy 1990. koriste se metodom optimalizacije pri određivanju promjena strukturnih karakteristika fizičkog sustava.

Collins 1974., Stetson 1975., Stetson i Palma 1976., Teylor 1977., Chen i Garba 1980., Haff 1984., Kim 1983. te Kuo i Wada 1987. koriste se metodom perturbacije prvoga reda pri određivanju veze između promjena modalnih karakteristika i strukturnih karakteristika.

Stubbs i Osegueda (1987. – 1995.) u svojim radovima pokazuju da je identifikacija mjesta i veličine oštećenja pojednostavljena uz uporabu mjerenih modalnih frekvencija i modalnih oblika. U tom su smislu razvili i određene algoritme, međutim postoje teškoće u točnom određivanju modalnih oblika.

2 Primjena perturbacija prvoga reda u analizi oštećenja

Pretpostavlja se neprigušeni dinamički sustav vlastitih vrijednosti sa n stupnjeva slobode u modalnom obliku

$$\left(K - \lambda_i M\right)\varphi_i = 0 \tag{1}$$

gdje su:

$M_{(n \times n)}$ - matrica masa sustava

$K_{(n \times n)}$ - matrica krutosti sustava

λ_i - vlastite vrijednosti sustava

ϕ_i - modalni vektori sustava

Modalni vektori mogu se normalizirati tako da je

$$\varphi_i^T M \varphi_j = \delta_{ij} \tag{2}$$

gdje je δ_{ij} - Kroneckerov simbol.

Navedene jednadžbe opisuju vezu između dinamičkih karakteristika λ_i i ϕ_i te strukturalnih karakteristika K i M. Oštećenje izvorne konstrukcije uzrokovat će promjene u matrici krutosti sustava za iznos δK. U dinamici konstrukcija se inače može uzeti da je promjena mase jednaka nuli, tj. da nema promjene mase tijekom vremena. Promjena krutosti sustava neminovno će uzrokovati promjenu vlastitih vrijednosti $\delta\lambda_i$ i promjenu vlastitih vektora $\delta\phi_i$. Perturbacijom jednadžbe (1) dobivamo jednadžbu vlastitih vrijednosti oštećene konstrukcije u obliku:

$$\left[K + \delta K - \left(\lambda_i + \delta\lambda_i\right)M\right]\left(\phi_i + \delta\phi_i\right) = 0 \tag{3}$$

Daljnja transformacija jednadžbe (3) vodi na izraz u obliku:

$$\begin{aligned}&\left(K - \lambda_i M\right)\varphi_i + \left(\delta K - \delta\lambda_i M\right)\varphi_i \\ &+ \left(K - \lambda_i M\right)\delta\varphi_i + \left(\delta K - \delta\lambda_i M\right)\delta\varphi_i = 0\end{aligned} \tag{4}$$

U jednadžbi (4) prvi dio jest problem vlastitih vrijednosti, i taj dio je nula, te ako odbacimo elemente višega reda nakon razvoja dobivamo

$$\delta K\varphi_i - \delta\lambda_i M\varphi_i = -\left(K - \lambda_i M\right)\delta\varphi_i \tag{5}$$

Navedenu jednadžbu pomnožimo s φ_i^T i dobivamo:

$$\phi_i^T \delta K \phi_i - \delta\lambda_i \phi_i^T M \phi_i = \phi_i^T\left(K - \lambda_i M\right)\delta\phi_i \tag{6}$$

Koristeći se uvjetom ortonormiranosti (2) i činjenicom da je $\varphi_i^T\left(K - \lambda_i M\right) = 0^T$, dobivamo vezu promjene vlastitih vrijednosti prema promjeni matrice krutosti

$$\delta\lambda_i = \phi_i^T \delta K \phi_i \tag{7}$$

Iz jednadžbe se vidi da je u ovom slučaju, uz zanemarivanje promjene mase i prigušenja, promjena vlastitih vrijednosti linearno proporcionalna s promjenom krutosti. Sada treba izraziti promjenu vlastitih vrijednosti u odnosu prema promjeni krutosti lokalnih konstruktivnih elemenata. Pokazano je da se ukupna promjena krutosti sustava dade izraziti kao suma promjene krutosti pojedinih elemenata sustava. Ako je K_j^e doprinos j-tog elementa u totalnoj matrici krutosti konstrukcije, tada krutost oštećene konstrukcije može biti napisana kao

$$\left(K+\delta K\right)=\sum_{j=1}^{n_e}K_j^e\left(1+\delta k_j\right) \tag{8}$$

gdje je - n_e broj elemenata konstrukcije, δk_j - promjena krutosti elementa j. U formulaciji konačnih elemenata to su konačni elementi u numeričkom modelu konstrukcije. Međutim δK može biti napisana kao

$$\delta K=\sum_{j=1}^{n_e}K_j^e\delta k_j \tag{9}$$

U formulaciji (9) sačuvana je simetrija matrice krutosti i spojni niz elemenata. Na kraju promjena globalne matrice krutosti ovisi o promjeni matrica krutosti pojedinih elemenata, pa uvrštavanjem (9) u (7) dobivamo sustav simultanih linearnih jednadžbi u obliku

$$\delta\lambda_i=\sum_{j=1}^{n_e}\varphi_i^T\mathrm{K}_j^e\varphi_i\delta\mathrm{k}_j,,\left(i=1,2,...m\right) \tag{10}$$

ili u matričnom obliku

$$D\delta k=\delta\lambda \tag{11}$$

gdje je D - matrica elemenata d_{ij} u obliku:

$$d_{ij}=\varphi_i^T K_j^e\varphi_i \tag{12}$$

δk - vektor nepoznatih promjena krutosti δk_j

$\delta\lambda$ - vektor promjena vlastitih vrijednosti $\delta\lambda_j$

m - broj modova uporabljenih u analizi.

Ako elemente vektora $\delta\lambda$ izmjerimo, a elemente d_{ij} odredimo analitički ili numerički prema (12) tada rješenje sustava (11) vodi do promjena krutosti pojedinih elemenata, odnosno do mjesta i razine oštećenja konstrukcije. U slučaju $m = n_e$ sustav je određen i vodi k jedinstvenom rješenju u obliku

$$\delta k=D^{-1}\delta\lambda \tag{13}$$

2.1 Uvođenje problema optimalizacije

U slučaju kad je broj izmjerenih podataka m veći od broja elemenata u sustavu $m > n_e$ sustav je preodređen, a rješenje se traži metodom najmanjih kvadrata. Međutim kako je broj izmjerenih modalnih karakteristika najčešće manji od broja elemenata, dakle $m< n_e$., takav sustav može biti riješen samo uvođenjem nekog od pogodnih kriterija optimalizacije. Najčešće uporabljeni kriterij optimalizacije preko metode najmanjih kvadrata ima opći oblik:

$$\begin{aligned}&\min J=c^T\delta k+\frac{1}{2}\delta k^T Q\delta k\\&\text{uz uvjet}: D\delta k=\delta\lambda\end{aligned} \tag{14}$$

gdje su: c - dani vektor, Q - dana pozitivno definitna matrica, što će se opisati kasnije. Sustav (14) ima rješenje u obliku koji je dobiven primjenom Lagrangeovih multiplikatora (Luenberger 1984.), a koje izgleda.

$$\begin{aligned}\delta k=&-Q^{-1}\left[I-D^T\left(DQ^{-1}D^T\right)^{-1}DQ^{-1}\right]c\\&+Q^{-1}D^T\left(DQ^{-1}D^T\right)^{-1}\delta\lambda\end{aligned} \tag{15}$$

Kako se navedeni kriterij najmanjih kvadrata nije pokazao sukladan s prirodom opisanog problema tražili su se drugi, prikladniji kriteriji optimalizacije. Kao najpovoljniji kriterij optimalizacije pokazao se kriterij minimizacije razlike vlastitih vektora oštećenog i neoštećenog sustava.

2.1.1 Minimizacija razlike vlastitih vektora oštećenog i neoštećenog sustava

U ovom se kriteriju polazi od dobre pretpostavke da treba minimizirati razliku vlastitih vektora oštećenog i neoštećenog sustava. Primjenom perturbacija I reda, problem vlastitih vrijednosti oštećenog sustava jest:

$$\left(K+\delta K\right)\varphi_i-\left(\lambda_i+\delta\lambda_i\right)M\varphi_i=r_i \tag{16}$$

gdje je r_i - vektor razlike (residual). Pojednostavljenjem izraza (16) dobiva se sljedeći oblik.

$$r_i=\delta K\varphi_i-\delta\lambda_i M\varphi_i \tag{17}$$

Sada se traži minimizaranje kvadrata razlike u obliku.

$$\begin{aligned}\left\|r\right\|^2=r_i^T r_i=\varphi_i^T\delta K^T\delta K\varphi_i-2\delta\lambda_i\varphi_i^T\delta KM\varphi_i\\+\delta\lambda_i^2\varphi_i^T M^2\varphi_i\end{aligned} \tag{18}$$

Zadnji konstantni član se isključuje iz optimalizacije, a primjenom izraza (9) i sumacijom po mjerenim promjenama vlastitih vrijednosti m dobiva se izraz:

$$J=\sum_{i=1}^{m}\left\|r_i\right\|^2=\delta k^T Q\delta k+2\delta k^T c \tag{19}$$

gdje je Q - matrica elemenata u obliku.

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k^T K_i^e K_j^e \varphi_k \tag{20}$$

Matrica $\boldsymbol{Q}$ mora biti simetrična i pozitivno definitna, a $\boldsymbol{c}$ je vektor elementa u obliku.

$$c_i = -\sum_{k=1}^{m} \delta\lambda_k \varphi_k^T K_i^e M \varphi_k \tag{21}$$

Primjenom kriterija (19) koji je sličan kriteriju (14) može se dobiti optimalno rješenje u obliku (15). Pokazalo se međutim da treba i dodatni kriterij koji opisuje svojstvo promjene krutosti elementa. To svojstvo se očituje u tome da je promjena krutosti uvijek nula ili negativna. Prema tome nastaje novi skup uvjetnih nejednakosti u obliku

$$\delta k \le 0 \tag{22}$$

Problem optimalizacije je sada proširen na sljedeći način:

$$\min J = \frac{1}{2}\delta k^T Q \delta k + \delta k^T c$$

$$\text{uz uvjete} \quad \begin{matrix} D\delta k = \delta\lambda \\ \delta k \le 0 \end{matrix} \tag{23}$$

Zadani sustav svodi se na problem nelinearnoga kvadratnog programiranja s uvjetima jednakosti i nejednakosti. Budući da je Q simetrična i pozitivno definitna matrica, problem je striktno konveksni. Rješenje navedenoga problema optimalizacije može se dobiti s pomoću neke od stabilnih metoda konveksnoga kvadratnog programiranja.

3 Primjena matrica osjetljivosti u analizi oštećenja

Drugi pristup analizi promjene dinamičkih karakteristika u odnosu prema strukturnim parametrima razvijao se preko matrica osjetljivosti (*sensitivity matrices*). U ovom pristupu izvodi se sustav linearnih algebarskih jednadžbi s oštećenjima elemenata kao nepoznanicama i matricom osjetljivosti kao glavnom matricom sustava. Nezgoda je u tome što matrica osjetljivosti uglavnom nije ni kvadratna ni simetrična. Stoga se rješenje takvog sustava dobiva kao optimalno rješenje pseudoinverzijom matrice osjetljivosti. Prema koncepciji modalne analize za sustave s n stupnjeva slobode dobiva se n jednadžbi tipa:

$$\lambda_i = \frac{K_i}{M_i} \quad (\mathrm{i} = 1,2,....\mathrm{n}) \tag{24}$$

λ_i je i-ta vlastita vrijednost sustava, a M_i i K_i su modalne matrice masa i krutosti u obliku.

$$\begin{aligned} K_i &= \varphi_i^T K \varphi_i \\ M_i &= \varphi_i^T M \varphi_i \end{aligned} \tag{25}$$

Indeks 'T 'označava transponirane vrijednosti.

Sada uzmemo prvu varijaciju jednadžbe (24) i dobivamo:

$$\frac{\delta\lambda_i}{\lambda_i} = \frac{\delta K_i}{K_i} - \frac{\delta M_i}{M_i} \tag{26}$$

gdje su: $\delta\lambda_i, \delta K_i, \delta M_i$ prve varijacije vlastitih vrijednosti, modalne krutosti i modalne mase. Primjenom jednadžbi (25) dobivamo

$$\begin{aligned} \delta K_i &= \varphi_i^T \delta K \varphi_i + 2\varphi_i^T K \delta\varphi_i \\ \delta M_i &= \varphi_i^T \delta M \varphi_i + 2\varphi_i^T M \delta\varphi_i \end{aligned} \tag{27}$$

gdje je $\delta\varphi_i$ prva varijacija i-tog vlastitog vektora.

Supstitucijom (27) u (26) s pojednostavljenjem dobivamo

$$\frac{d\lambda_i}{\lambda_i} = \frac{\varphi_i^T dK \varphi_i}{K_i} - \frac{\varphi_i^T M \varphi_i}{M_i} \tag{28}$$

Uzimanjem prvog člana Taylorova razvoja prvog dijela na desnoj strani jednadžbe (28) dobivamo

$$\frac{\varphi_i^T \delta K \varphi_i}{K_i} \cong \sum_{j=1}^{B} f_{ij} \delta k_j + O \tag{29}$$

gdje je

δk_j - prva varijacija j-tog parametra krutosti

B - broj karakteristika krutosti u problemu

f_{ij} - je osjetljivost i-te modalne krutosti u odnosu prema j-tom parametrom krutosti

O - je ostatak Tajlorova razvoja koji se dalje zanemaruje.

Slično je i s drugim članom u jednadžbi (28). Na isti način se dobiva

$$\frac{\varphi_i^T \delta M \varphi_i}{M_i} \cong \sum_{j=1}^{N} g_{ij} \delta m_j + O \tag{30}$$

gdje je

δm_j - prva varijacija u j-tom parametru mase

N - ukupan broj karakteristika mase

g_{ij} - osjetljivost i-te modalne mase na j-ti parametar mase.

Ako sada uzmemo da je:

$$z_i = \frac{\delta\lambda_i}{\lambda_i}, \alpha_i = \frac{\delta k_i}{k_i} \, i \, \beta_i = \frac{\delta m_i}{m_i} \tag{31}$$

tada kombinacijom jednadžbi (28) do (30) dobivamo

$$z_i = \sum_{j=1}^{B} f_{ij} k_j \alpha_j - \sum_{j=1}^{N} g_{ij} m_j \beta_j \tag{32}$$

U navedenoj su jednadžbi z_i α_i i β_i pojedinačne promjene i-te vlastite vrijednosti te karakteristika krutosti i mase. Dalje, ako uvedemo da je $F_{ij} = f_{ij} \mathrm{k}_j \; i \; G_{ij} = g_{ij} \beta_j$, jednadžba (32) postaje

$$z_i = \sum_{j=1}^{B} F_{ij} \alpha_j - \sum_{j=1}^{N} G_{ij} \beta_j \tag{33}$$

Sada definiramo vektore

$$\begin{aligned} z &= [z_1, z_2, ..., z_Q]^T \\ \alpha &= [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_B]^T \\ \beta &= [\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N]^T \end{aligned} \tag{34}$$

gdje je

Q – broj frekvencija. Sustav od Q - jednadžbi predstavljen u obliku (32) možemo pisati u matričnom obliku

$$Z = F\alpha - G\beta \tag{35}$$

gdje je

F - matrica komponenata F_{ij}

G - matrica komponenata G_{ij}.

To su matrice osjetljivosti na definirane promjene krutosti i mase u zavisnosti od promjene vlastitih vrijednosti. One su, kao što je pokazano, teorijski određene. Ako znamo vektor z**,** možemo odrediti pojedinačne promjene krutosti ili mase.

Jednadžba (35) značajna je formulacija u primjeni bezrazornih metoda ispitivanja gdje se redukcija nekog parametra krutosti može uporabiti kao mjera oštećenja pojedinačnog elementa $0 < \alpha < 1$. Uz pretpostavku da je β određeno ili se može procijeniti, tada za sve lokacije i iznose oštećenja imamo izraz

$$\alpha = F^+ (z + G\beta) \tag{36}$$

gdje je F^+ generalizirana inverzija, jer matrica osjetljivosti najčešće nije ni simetrična ni kvadratna. U slučaju kad imamo i prigušenje, tada se (36) proširuje u obliku

$$\alpha = F^+ (z + G\beta + D\gamma) \tag{37}$$

gdje je

D - matrica osjetljivosti vezana za modalna prigušenja

γ - vektor pojedinačnih promjena prigušenja

(+) - je oznaka za pseudoinverziju matrice osjetljivosti F.

3 Određivanje matrice osjetljivosti oštećenja

Poznato je da u dinamici konstrukcija uglavnom nema promjena mase za gibanja konstrukcije, a najčešće ni tijekom eksploatacije. S druge strane, prigušenje zbog njegove vrlo kompleksne prirode i teškoća oko njegova određivanja također najčešće zanemarujemo. Stoga ćemo ovdje promatrati samo matricu osjetljivosti koja je vezana za promjenu krutosti ovisno o promjeni modalnih vlastitih vrijednosti

$$z_n = F_{nj} \alpha_j \tag{38}$$

Ovdje se F_{nj} matrica osjetljivosti definira kao promjena n-te modalne krutosti pri jediničnom oštećenju na lokaciji j. Koeficijenti matrice F_n mogu biti određeni numerički ili analitički. Numeričko se određivanje provodi u četiri koraka, i to:

1. određuju se modalne frekvencije neoštećenog sustava $\left(\omega_{n0}^2;\ \mathrm{n} = 1,2,.....,\mathrm{Q}\right)$
2. uvodimo poznate iznose oštećenja α_j u lokaciji j i određujemo vlastite frekvencije $\left(\omega_n^2; \mathrm{n} = 1,2,.....,\mathrm{Q}\right)$ oštećene konstrukcije.
3. računamo promjene u modalnim krutostima $z_n = \left(\dfrac{\omega_n^2}{\omega_{n0}^2} - 1 \right)$.
4. računamo elemente j-tog stupca matrice osjetljivosti oštećenja kao $F_{nj} = \dfrac{z_n}{\alpha_j}$.

Numerički se postupak najbolje provodi metodom konačnih elemenata i to je moguće za velike sustave. Za manje i jednostavnije zadaće kao što su npr. štapovi i ploče s jednostavnim rubnim uvjetima elemente matrice osjetljivosti možemo odrediti i analitički

4 Pristup analizi oštećenja preko matrice fleksibilnosti

Neki istraživači u posljednje vrijeme usmjeravaju pažnju na moguće određivanje oštećenja sustava primjenom matrice fleksibilnosti. Primjenom modalne analize uz uvjete normalizacije vlastitih vektora u odnosu prema masi sustava imamo:

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \Phi^T M \Phi \\ \overline{K} &= \Phi^T K \Phi = \mathrm{diag}(\omega_i^2) \end{aligned} \tag{39}$$

U okviru navedene teorije moguće je matrice krutosti sustava K i fleksibilnosti F izraziti kao:

$$K = M\Phi\overline{K}\Phi^T M = M\left(\sum_{i*1}^{n}\omega_i^2\varphi_i\varphi_i^T\right)M \text{ i}$$

$$\mathrm{F} = \Phi\overline{\mathrm{K}}^{-1}\Phi^T = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i^2}\varphi_i\varphi_i^T \tag{40}$$

n - broj stupnjeva slobode sustava

M - matrica masa

K - matrica krutosti

ϕ_{i} - vlastiti vektori

ω_{i} - vlastite frekvencije.

Iz jednadžbe (40) se vidi da doprinos krutosti raste pri porastu frekvencije. S druge strane doprinos matrici fleksibilnosti pada kad frekvencija raste. To ide, kao što se vidi, s kvadratom. Poznato je da na konstrukcijama možemo pouzdano mjeriti samo nekoliko najnižih frekvencija, što ograničava uspješan pristup otkrivanju defekata s pomoću matrica krutosti. Zbog toga se krenulo u istraživanja putem matrice fleksibilnosti. Iz jednadžbe (40) vidi se da matrica fleksibilnosti naglo pada s porastom frekvencije što potkrepljuje pravac istraživanja. No na žalost promjene u matrici fleksibilnosti nisu lokalizirane na područje ili mjesto oštećenja te se ne može direktno izraziti veličina i mjesto oštećenja samom matricom fleksibilnosti. Da bi međutim izrazili iznos i mjesto oštećenja s pomoću matrice fleksibilnosti dovodimo u relaciju promjene matrice fleksibilnosti u odnosu prema promjeni matrice krutosti.

Neka su K_1 i F_1 početne matrice krutosti i fleksibilnosti neoštećene strukture, a K_2 i F_2 su matrice krutosti i fleksibilnosti nakon oštećenja strukture, tada se može pisati

$$K_2 = K_1 - \Delta K \tag{41}$$

$$F_2 = F_1 + \Delta F \tag{42}$$

Iz prirodne zakonitosti je poznato da krutost pada a fleksibilnost raste s porastom oštećenja. ΔK i ΔF su promjene krutosti odnosno fleksibilnosti. Na temelju veze matrica imamo

$$K_2 F_2 = I \tag{43}$$

Izraz (43) se s pomoću izraza (41) i (42) može pisati

$$(K_1 - \Delta K)(F_1 + \Delta F) = I \tag{44}$$

Razvojem navedene jednadžbe dobivamo nov oblik:

$$K_1 F_1 - \Delta K F_1 + (K_1 - \Delta K)\Delta F = I \tag{45}$$

Iz jednadžbe (41) i (45) i uz $K_1 F_1 = I$ imamo

$$K_2 \Delta F = \Delta K F_1 \tag{46}$$

Množenjem obiju strana sa K_1 i uz $K_1 = F_1^{-1}$ dobivamo

$$K_2 \Delta F K_1 = \Delta K \tag{47}$$

Ovdje je prikazana promjena matrice krutosti u zavisnosti od promjene matrice fleksibilnosti. Mi međutim trebamo izraziti promjenu matrice fleksibilnosti preko promjene matrice krutosti, zato jednadžbu (46) množimo sa F_2 i uz (43) dobivamo:

$$\Delta F = F_2 \Delta K F_1 \tag{48}$$

Oblik izvedenog sustava ovisi o broju uporabljenih modalnih oblika. Rješenje ovisi o oblicima matrica F_1 i F_2, ali sustav daje dobru bazu jer se matrice F_1 i F_2 mogu dobro procijeniti na temelju nekoliko nižih frekvencija. Sustav se može pisati:

$$\Delta F = F_2\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i K_i\right)F_1 \text{ i} \tag{49}$$

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i F_2 K_i F_1 \tag{50}$$

gdje je K_{i} -matrica krutosti i-tog elementa prije oštećenja, a α_{i} je redukcija krutosti i-tog elementa i predstavlja oštećenje i-tog elementa. Sustav (50) možemo pisati u matričnom obliku:

$$Ax = b \tag{51}$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} (F_2K_1F_1)_{11}\ (F_2K_2F_1)_{11}........(F_2K_nF_1)_{11} \\ (F_2K_1F_1)_{nn}\ (F_2K_2F_1)_{nn}........(F_2K_nF_1)_{nn} \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$x^T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \tag{53}$$

$$b^T = (\delta f_{11}, \delta f_{12}, ...\delta f_{nn}) \tag{54}$$

gdje su δf_{jk} elementi matrice ΔF.

Rješenje sustava se uglavnom dobiva kao i u dosad navedenim slučajevima generalnom inverzijom ili pseudoinverzijom matrice sustava, dakle:

$$x = A^+ b,\ A^+ = A^T\left(AA^T\right)^{-1} \tag{55}$$

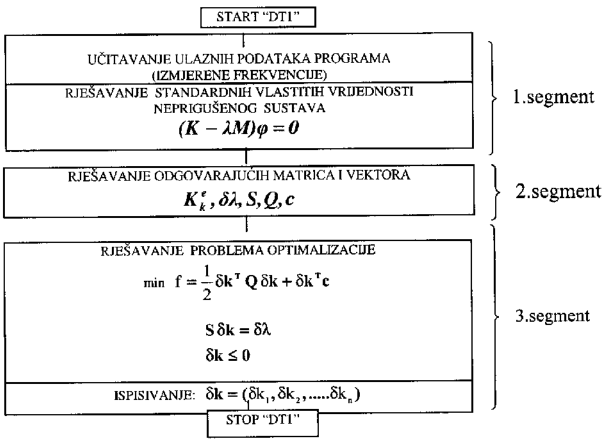
gdje je (+) oznaka za pseudoinverziju matrice sustava.

5 Programi "DT1" i "DT2" za otkrivanje oštećenja na konstrukcijama

U skladu s teorijom iz poglavlja 2. napravljen je računalni program pod nazivom "DT1". Program je napisan u FORTRAN-u, a napravljen je radi pronalaska oštećenja na jednostavnijim štapnim konstrukcijama; koncipiran je po metodi konačnih elemenata za štapne sustave a sastoji se od tri glavna segmenta. U prvom segmentu računaju se vlastite vrijednosti sustava i spremaju u datoteku. U drugom segmentu računaju se matrice pojedinih elemenata u obliku matrice sustava, koeficijenti matrice sustava jednadžbi i koeficijenti matrice i vektora u funkciji cilja. Treći segment programa jest matematički optimalizator koji rješava problem zadanoga kvadratnog programiranja konveksnog tipa.

Osim programa "DT1" napravljen je i dodatni program pod nazivom "DT2" kojega je zadaća računati vlastite vrijednosti oštećenog sustava pri teorijskim simulacijama.

Program "DT2" otprilike odgovara I segmentu programa "DT1" u nešto modificiranom obliku. Ovaj je program napravljen u svrhu posluživanja programa "DT1" vlastitim vrijednostima oštećenog sustava. U slučaju izmjerenih vrijednosti vlastitih frekvencija ovaj se program ne rabi već samo "DT1" koji tada uzima mjerene vrijednosti $\delta\lambda_k$ ($k = 1, m$) iz datoteke. Međutim u slučaju teorijske simulacije oštećenja pojedinih elemenata ili grupe elemenata služi program "DT2" koji računa frekvencije i vektore oštećenog sustava i sprema ih u datoteku. Aktiviranjem programa "DT1" podaci oštećenog sustava se preuzimaju iz datoteke te računaju razlike vlastitih vrijednosti i ostali parametri tretirani u programu "DT1". Dakle u tom se slučaju prvo pokrene program "DT2". Oštećenja u programu "DT2" simuliraju se redukcijom krutosti pojedinog elementa ili grupe elemenata. Shema rada programa "DT1" prikazana je na slici 1.

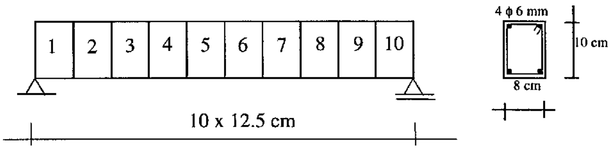


Slika 1. Shema rada programa "DT1"

6 Numerički primjeri

6.1 Primjer 1. – Otkrivanje iniciranih oštećenja

U ovom primjeru napravljena je analiza otkrivanja namjerno iniciranih oštećenja na pojedinim elementima slobodno oslonjene betonske gredice na temelju izmjerenih vlastitih frekvencija prije i nakon izazvanog oštećenja. Ovim se primjerom potvrđuje teorija iznesena u točki 2. ovoga rada. Eksperimenti su obavljeni na betonskim gredicama dimenzija 8 x 10 x 125 cm, armiranih s 4 ϕ 6 mm, modula elastičnosti Eb = 3,4 10^4 MPa i gustoće ρ = 2,4 10^{-5} N/mm^3 (slika 2.). Gredica je bila podi



Slika 2. Armiranobetonska gredica

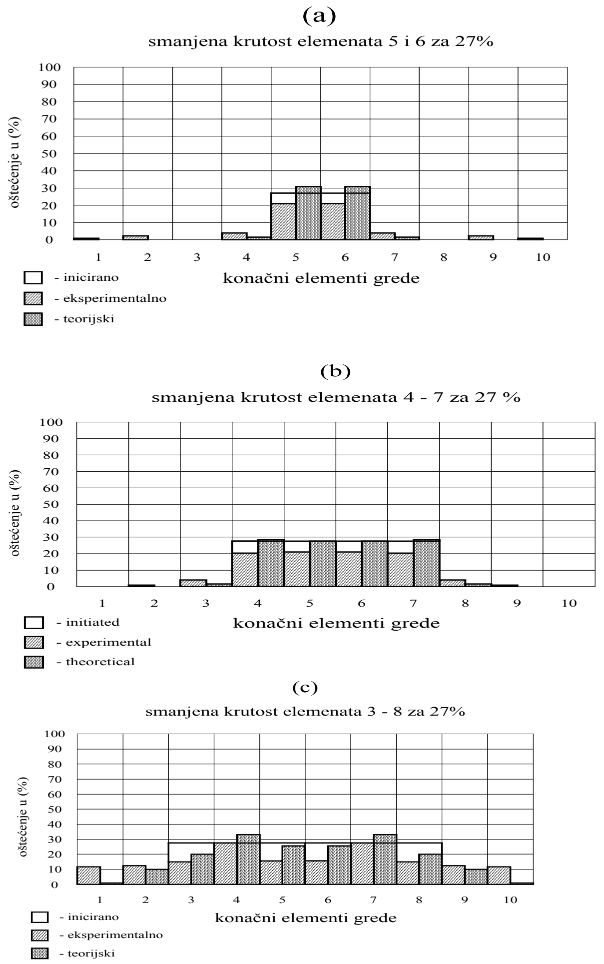
jeljena na 10 jednakih elemenata, a na isti je način tretirana numerički, metodom konačnih elemenata. Primjenom sinusnog pobuđivača oscilacija i preciznog akcelerometra izmjerene su prve tri vlastite frekvencije neoštećene gredice. Nakon toga je inicirano oštećenje gredice na dijelu elemenata 5 i 6 električnom kutnom brusilicom tako da je savojna krutost smanjena 27%. Sada su ponovno s pomoću pobuđivača i akcelerometra izmjerene prve tri vlastite frekvencije ovako oštećene gredice. Postupak se ponavljao nakon oštećivanja gredice na dijelu elemenata 4 do 7 i elemenata 3 do 8. Izmjerene vrijednosti vlastitih frekvencija prema spomenutom scenariju prikazane su u tablici 1. Koristeći se računalnim programom " DT2" određene su teorijske vrijednosti vlastitih frekvencija potpuno sukladno uvjetima u eksperimentu. Rezultati tih teorijskih vrijednosti vlastitih frekvencija prikazani su u tablici 2. Rabeći računalne programe "DT1" i "DT2" detektirani su lokacija i iznos oštećenja s priličnim postotkom točnosti. Rezultati ove analize prikazani su na slici 3.

Tablica 1. Izmjerene vlastite frekvencije betonske gredice (Hz)

Oblik titranja	Frekvencije neoštećene gredice	Oštećenje ≅ 27%		
		Elementi (5 -6)	Elementi (4 –7)	Elementi (3 -8)
1	105,47	98,88	95,21	92,77
2	437,50	429,69	416,02	393,07
3	1066,41	1025,40	1021,50	987,55

Tablica 2. Teorijske vlastite frekvencije betonske gredice (Hz)

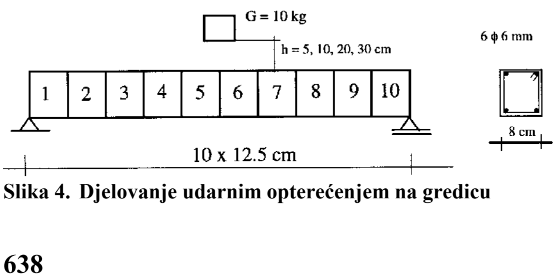
Oblik titranja	Frekvencije neoštećene gredice	Oštećenje ≅ 27%		
		Elementi (5 - 6)	Elementi (4 –7)	Elementi (3 -8)
1	112,32	105,04	100,06	97,25
2	449,33	445,32	425,62	400,70
3	1011,41	965,10	960,60	924,50



Slika 3. Teorijska, eksperimentalna i inicirana oštećenja: a) elementi (5-6), b) elementi (4-7), c) elementi (3-8)

6.2 Primjer 2. - Otkrivanje oštećenja nastalih udarnim opterećenjem

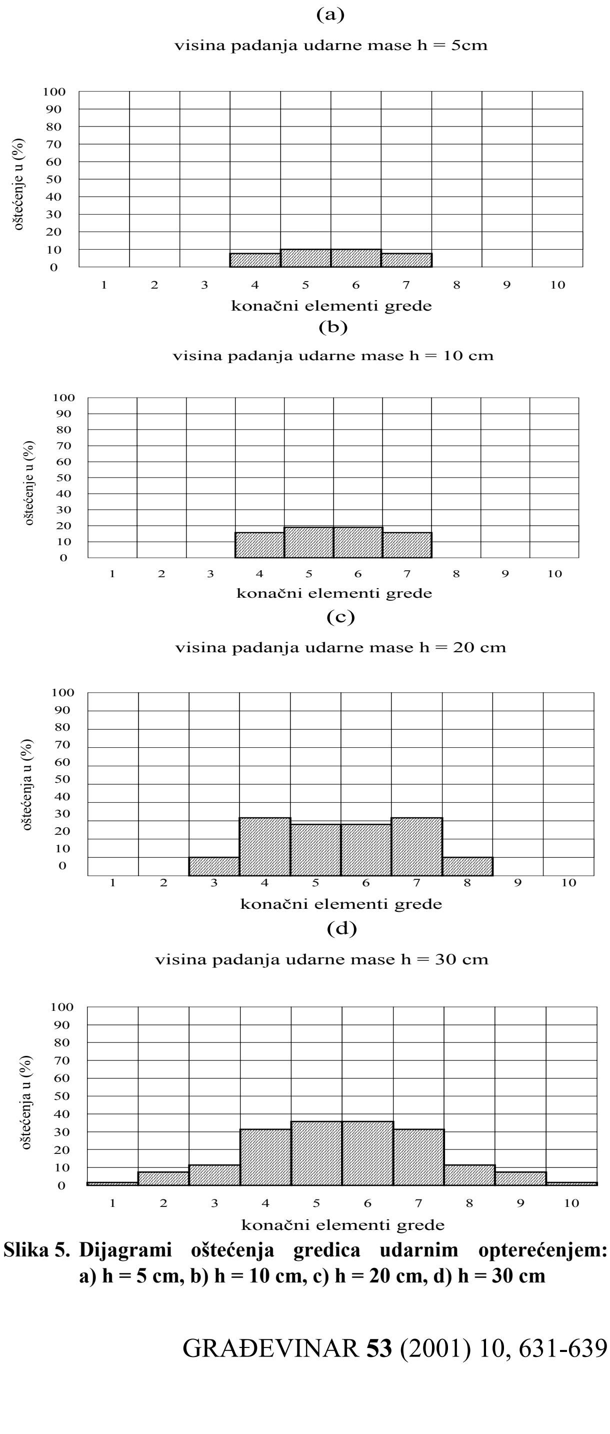
U ovom je primjeru napravljena analiza otkrivanja oštećenja na armiranobetonskim gredicama nakon djelovanja udarnog opterećenja. Udarno opterećenje izazvano je padanjem utega težine 10 kg na sredinu raspona gredica s različitih visina (5,10,20 i 30 cm). Dimenzije armiranobetonskih gredica i ostali podaci sukladni su podacima iz prethodnog primjera, a prikaz izvođenja pokusa vidi se na slici 4. Za svaki novi pokus uporabljena je nova gredica. Nakon svakog pokusa obavljeno je mjerenje vlastitih frekvencija da bi se registrirale njihove promjene u odnosu prema početnom stanju kad gredica nije bila oštećena. Kao i u prethodnom primjeru za dobru procjenu lokacije i veličine oštećenja bile su dovoljne prve tri vlastite frekvencije. Rezultati analize prikazani su u tablici 3. i na slici 5.



Slika 4. Djelovanje udarnim opterećenjem na gredicu

Tablica 3. Izmjerene vlastite frekvencije armiranobetonske gredice

Oblik titranja	Frekvencije neoštećene gredice	h [cm]			
		5	10	20	30
1	109,18	105,47	101,56	95,70	91,80
2	449,28	443,40	437,50	425,78	408,20
3	1038,44	1021,48	1005,86	986,33	945,31



Slika 5. Dijagrami oštećenja gredica udarnim opterećenjem: a) h = 5 cm, b) h = 10 cm, c) h = 20 cm, d) h = 30 cm

5 Zaključak

Opisana metoda je jedna od novijih metoda bezrazornog ispitivanja stanja konstrukcija. Postupak se temelji na minimalnom broju izmjerenih dinamičkih karakteristika neke konstrukcije. Naime dovoljno je na temelju jednoga točnog mjerenja na konstrukciji putem preciznih instrumenata dobiti podatke o nekoliko prvih vlastitih frekvencija, da bi se moglo ustanoviti stanje konstrukcije. Ova, još uvijek nedovoljno istražena metoda određuje stanje konstrukcije tijekom eksploatacije na temelju razlike izmjerenih vlastitih vrijednosti između dva kontrolna razdoblja vremena. Najbolje je naravno stanje dinamičkih karakteristika snimiti neposredno prije eksploatacije konstrukcije kako bi se u svakoj idućoj kontroli stanja konstrukcije mogla znati razlika u odnosu prema početnom neoštećenom stanju. Stoga je potrebno stvarati bazu podataka dinamičkih karakteristika novih konstrukcija da bi se opisanim postupkom moglo kontrolirati stanje dotičnog objekta u određenom vremenu eksploatacije. Opisana metoda je testirana na velikom broju uzoraka betonskih gredica. Odabran je beton kao materijal jer se kod njega tijekom veće razine opterećenja pojavljuju pukotine koje uzrokuju znatna oštećenja a time naravno i pad krutosti i promjenu dinamičkih karakteristika. Postupak inače općenito vrijedi za sve vrste konstrukcija i materijala. Svaka korozija na čeliku i drvetu ili promjena stanja kod prednapetih konstrukcija izaziva promjenu krutosti sustava, a time i promjene u vlastitim frekvencijama, a sve se te pojave mogu pratiti opisanom metodom. U ovome radu su se prve tri izmjerene vlastite frekvencije pokazale sasvim dovoljnima u otkrivanju oštećenja jednostavnih štapnih konstrukcija. Računalni programi “DT1” i “DT2” uspješno se rabe u otkrivanju oštećenja jednostavnih štapnih konstrukcija s pomoću izmjerenih vlastitih frekvencija.

IZVORI

[1] Bathe, Klaus – Jurgen; Wilson, Edward L.: *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, 1976.

[2] Fox, Richard L.: *Optimalization methods for engineering design, adison-wesley* Publishing Company, 1971.

[3] Brebbia C. A.; Ferrante, A. J.: *Computational Methods for the Solution of Engineering Problems*, Pentech Press Limited, 1986.

[4] Shen, M. H. H.; Taylor, J. E.: *An Identification Problem for Vibrating Cracked Beams*, Journal of Sound and Vibration, 1991., 150 (3), 457.-384.

[5] Hoff, C. J.; Bernitas, M. M.; Sanstrom, R. E.; Anderson, W. J.: *Inverse Perturbation Method for Structural Redesign with Frequency and Mode Shape Constraints,* AIAA Journal, Vol.22., no. 9., 1304.-1309., 1984.

[6] Cawley, P.; Adams, R. D.: *The Location of Defects in Structures from Mesurements of Natural Frequencies,* Journal of Strain Analysis, Vol. 14, No. 2., 1979.

[7] PANDEY, A. K.; BISWAS, M.; SAMMAN, M. M.: *Damage Detection from changes in Curvature Mode Shapes*, Journal of Sound and Vibrations, 145 (2), 321.-332., 1991.

[8] STUBBS, N.; OSEGUEDA, R.: *Global Damage Detection in Solids - Experimental verification*, The International Journal of Analitical and Experimental Modal Analysis, 5 (2), 81.-97., 1990.

[9] TOPLE, K. G.; STUBBS, N.: *Nondestructive Damage Evalution in Complex Structures from a Minimum of Modal Parameters*, The International Journal of Analitical and Experimental Modal Analysis, 10 (2), Apr. 1995.

[10] Panday, P. C.; Barai, S. V.: *Multilayer Perceptron in Damage Detection of Bridge Structures*, Computers & Structures, Vol. 54., No. 4., pp. 597.-608., 1995.

[11] Herceg, LJ.: *Ocjena realnog stanja konstrukcija određivanjem dinamičkih karakteristika*, Disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, srpanj 1993.

[12] Chen, J. C.; Wada, B. K.: *Matrix Perturbation for Structural Dynamic Analysis*, AIAA Journal, Vol. 15., No. 8. august 1977.

[13] Collins, J. D.: Thompson, W. T.: *The Eigenvalue Problem for Structural Systems with Statistical Properties*, AIAA Journal, Vol.7., No.4., 1969.

[14] Lapierre, H.: Ostiguy, G.: *Structural Model Verification with Linear Quadratic Optimization Theory*, AIAA Journal, Vol. 28., No. 8. august 1990.

[15] Rak, M.: *Utjecaj intenziteta udarnog opterećenja na promjenu dinamičkih karakteristika armiranobetonskih konstrukcija*, Disertacija, Građevinski fakultet Sveučilista u Zagrebu, listopad, 1996.

[16] Rak, M.: *Finite element programs “DT1” and “DT2” in damage detection of beams and framed structure.,* VIII-th International Conference, Numerical Methods in Continuum Mechanics, Lyptovsky Jan, Slovak Republic, September, 2000.